

# Estudos em Ciências Exatas e da Terra

Desafios, Avanços e Possibilidades

Alireza Mohebi Ashtiani  
(organizador)

VOL II



EDITORA  
ARTEMIS  
2024

# Estudos em Ciências Exatas e da Terra

Desafios, Avanços e Possibilidades

Alireza Mohebi Ashtiani  
(organizador)

VOL II



EDITORA  
ARTEMIS  
2024



O conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição Creative Commons Atribuição-Não-Comercial NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0). Direitos para esta edição cedidos à Editora Artemis pelos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento, desde que sejam atribuídos créditos aos autores, e sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

A responsabilidade pelo conteúdo dos artigos e seus dados, em sua forma, correção e confiabilidade é exclusiva dos autores. A Editora Artemis, em seu compromisso de manter e aperfeiçoar a qualidade e confiabilidade dos trabalhos que publica, conduz a avaliação cega pelos pares de todos manuscritos publicados, com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

<b>Editora Chefe</b>	Prof. <sup>a</sup> Dr. <sup>a</sup> Antonella Carvalho de Oliveira
<b>Editora Executiva</b>	M. <sup>a</sup> Viviane Carvalho Mocellin
<b>Direção de Arte</b>	M. <sup>a</sup> Bruna Bejarano
<b>Diagramação</b>	Elisangela Abreu
<b>Organizador</b>	Prof. Dr. Alireza Mohebi Ashtiani
<b>Imagem da Capa</b>	Abstract Style Landscapes /123RF
<b>Bibliotecário</b>	Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

#### Conselho Editorial

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ada Esther Portero Ricol, *Universidad Tecnológica de La Habana “José Antonio Echeverría”*, Cuba  
Prof. Dr. Adalberto de Paula Paranhos, *Universidade Federal de Uberlândia*, Brasil  
Prof. Dr. Agustín Olmos Cruz, *Universidad Autónoma del Estado de México*, México  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Amanda Ramalho de Freitas Brito, *Universidade Federal da Paraíba*, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ana Clara Monteverde, *Universidad de Buenos Aires*, Argentina  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ana Júlia Viamonte, *Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP)*, Portugal  
Prof. Dr. Ángel Mujica Sánchez, *Universidad Nacional del Altiplano*, Peru  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Angela Ester Mallmann Centenaro, *Universidade do Estado de Mato Grosso*, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Begoña Blandón González, *Universidad de Sevilla*, Espanha  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Carmen Pimentel, *Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro*, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Catarina Castro, *Universidade Nova de Lisboa*, Portugal  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Círcia Cervera Delgado, *Universidad de Guanajuato*, México  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cláudia Neves, *Universidade Aberta de Portugal*  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cláudia Padovesi Fonseca, *Universidade de Brasília-DF*, Brasil  
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos, *Universidade Federal da Grande Dourados*, Brasil  
Prof. Dr. Cristo Ernesto Yáñez León – *New Jersey Institute of Technology*, Newark, NJ, Estados Unidos  
Prof. Dr. David García-Martul, *Universidad Rey Juan Carlos de Madrid*, Espanha  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Deuzimar Costa Serra, *Universidade Estadual do Maranhão*, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Dina Maria Martins Ferreira, *Universidade Estadual do Ceará*, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Edith Luévano-Hipólito, *Universidad Autónoma de Nuevo León*, México  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Eduarda Maria Rocha Teles de Castro Coelho, *Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro*, Portugal  
Prof. Dr. Eduardo Eugênio Spers, *Universidade de São Paulo (USP)*, Brasil  
Prof. Dr. Eloi Martins Senhoras, *Universidade Federal de Roraima*, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Elvira Laura Hernández Carballido, *Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*, México



Prof.ª Dr.ª Emilas Darlene Carmen Lebus, *Universidad Nacional del Nordeste/ Universidad Tecnológica Nacional, Argentina*  
Prof.ª Dr.ª Erla Mariela Morales Morgado, *Universidad de Salamanca, Espanha*  
Prof. Dr. Ernesto Cristina, *Universidad de la República, Uruguay*  
Prof. Dr. Ernesto Ramírez-Briones, *Universidad de Guadalajara, México*  
Prof. Dr. Fernando Hitt, *Université du Québec à Montréal, Canadá*  
Prof. Dr. Gabriel Díaz Cobos, *Universitat de Barcelona, Espanha*  
Prof.ª Dr.ª Gabriela Gonçalves, Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP), Portugal  
Prof.ª Dr.ª Galina Gumovskaya – Higher School of Economics, Moscow, Russia  
Prof. Dr. Geoffroy Roger Pointer Malpass, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Brasil  
Prof.ª Dr.ª Gladys Esther Leoz, *Universidad Nacional de San Luis, Argentina*  
Prof.ª Dr.ª Glória Beatriz Álvarez, *Universidad de Buenos Aires, Argentina*  
Prof. Dr. Gonçalo Poeta Fernandes, Instituto Politécnico da Guarda, Portugal  
Prof. Dr. Gustavo Adolfo Juarez, *Universidad Nacional de Catamarca, Argentina*  
Prof. Dr. Guillermo Julián González-Pérez, *Universidad de Guadalajara, México*  
Prof. Dr. Håkan Karlsson, *University of Gothenburg, Suécia*  
Prof.ª Dr.ª Iara Lúcia Tescarollo Dias, Universidade São Francisco, Brasil  
Prof.ª Dr.ª Isabel del Rosario Chiyon Carrasco, *Universidad de Piura, Peru*  
Prof.ª Dr.ª Isabel Yohena, *Universidad de Buenos Aires, Argentina*  
Prof. Dr. Ivan Amaro, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil  
Prof. Dr. Iván Ramon Sánchez Soto, *Universidad del Bío-Bío, Chile*  
Prof.ª Dr.ª Ivânia Maria Carneiro Vieira, Universidade Federal do Amazonas, Brasil  
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz, *University of Miami and Miami Dade College, Estados Unidos*  
Prof. Dr. Jesús Montero Martínez, *Universidad de Castilla - La Mancha, Espanha*  
Prof. Dr. João Manuel Pereira Ramalho Serrano, Universidade de Évora, Portugal  
Prof. Dr. Joaquim Júlio Almeida Júnior, UniFIMES - Centro Universitário de Mineiros, Brasil  
Prof. Dr. Jorge Ernesto Bartolucci, *Universidad Nacional Autónoma de México, México*  
Prof. Dr. José Cortez Godinez, Universidad Autónoma de Baja California, México  
Prof. Dr. Juan Carlos Cancino Diaz, Instituto Politécnico Nacional, México  
Prof. Dr. Juan Carlos Mosquera Feijoo, *Universidad Politécnica de Madrid, Espanha*  
Prof. Dr. Juan Diego Parra Valencia, *Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín, Colômbia*  
Prof. Dr. Juan Manuel Sánchez-Yáñez, *Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México*  
Prof. Dr. Juan Porras Pulido, *Universidad Nacional Autónoma de México, México*  
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Brasil  
Prof. Dr. Leinig Antonio Perazolli, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Brasil  
Prof.ª Dr.ª Livia do Carmo, Universidade Federal de Goiás, Brasil  
Prof.ª Dr.ª Luciane Spanhol Bordignon, Universidade de Passo Fundo, Brasil  
Prof. Dr. Luis Fernando González Beltrán, *Universidad Nacional Autónoma de México, México*  
Prof. Dr. Luis Vicente Amador Muñoz, *Universidad Pablo de Olavide, Espanha*  
Prof.ª Dr.ª Macarena Esteban Ibáñez, *Universidad Pablo de Olavide, Espanha*  
Prof. Dr. Manuel Ramiro Rodriguez, *Universidad Santiago de Compostela, Espanha*  
Prof. Dr. Manuel Simões, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal  
Prof.ª Dr.ª Márcia de Souza Luz Freitas, Universidade Federal de Itajubá, Brasil  
Prof. Dr. Marcos Augusto de Lima Nobre, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Brasil  
Prof. Dr. Marcos Vinicius Meiado, Universidade Federal de Sergipe, Brasil  
Prof.ª Dr.ª Mar Garrido Román, *Universidad de Granada, Espanha*  
Prof.ª Dr.ª Margarida Márcia Fernandes Lima, Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil  
Prof.ª Dr.ª María Alejandra Arecco, *Universidad de Buenos Aires, Argentina*  
Prof.ª Dr.ª Maria Aparecida José de Oliveira, Universidade Federal da Bahia, Brasil  
Prof.ª Dr.ª Maria Carmen Pastor, *Universitat Jaume I, Espanha*



Prof.ª Dr.ª Maria da Luz Vale Dias – Universidade de Coimbra, Portugal  
Prof.ª Dr.ª Maria do Céu Caetano, Universidade Nova de Lisboa, Portugal  
Prof.ª Dr.ª Maria do Socorro Saraiva Pinheiro, Universidade Federal do Maranhão, Brasil  
Prof.ª Dr.ª MªGraça Pereira, Universidade do Minho, Portugal  
Prof.ª Dr.ª Maria Gracinda Carvalho Teixeira, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Brasil  
Prof.ª Dr.ª María Guadalupe Vega-López, *Universidad de Guadalajara, México*  
Prof.ª Dr.ª Maria Lúcia Pato, Instituto Politécnico de Viseu, Portugal  
Prof.ª Dr.ª Maritza González Moreno, *Universidad Tecnológica de La Habana, Cuba*  
Prof.ª Dr.ª Mauriceia Silva de Paula Vieira, Universidade Federal de Lavras, Brasil  
Prof. Dr. Melchor Gómez Pérez, *Universidad del Pais Vasco, Espanha*  
Prof.ª Dr.ª Ninfa María Rosas-García, Centro de Biotecnología Genómica-Instituto Politécnico Nacional, México  
Prof.ª Dr.ª Odara Horta Boscolo, Universidade Federal Fluminense, Brasil  
Prof. Dr. Osbaldo Turpo-Gebera, *Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, Peru*  
Prof.ª Dr.ª Patrícia Vasconcelos Almeida, Universidade Federal de Lavras, Brasil  
Prof.ª Dr.ª Paula Arcoverde Cavalcanti, Universidade do Estado da Bahia, Brasil  
Prof. Dr. Rodrigo Marques de Almeida Guerra, Universidade Federal do Pará, Brasil  
Prof. Dr. Saulo Cerqueira de Aguiar Soares, Universidade Federal do Piauí, Brasil  
Prof. Dr. Sérgio Bitencourt Araújo Barros, Universidade Federal do Piauí, Brasil  
Prof. Dr. Sérgio Luiz do Amaral Moretti, Universidade Federal de Uberlândia, Brasil  
Prof.ª Dr.ª Silvia Inés del Valle Navarro, *Universidad Nacional de Catamarca, Argentina*  
Prof.ª Dr.ª Solange Kazumi Sakata, Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares (IPEN)- USP, Brasil  
Prof.ª Dr.ª Stanislava Kashtanova, *Saint Petersburg State University, Russia*  
Prof.ª Dr.ª Susana Álvarez Otero – *Universidad de Oviedo, Espanha*  
Prof.ª Dr.ª Teresa Cardoso, Universidade Aberta de Portugal  
Prof.ª Dr.ª Teresa Monteiro Seixas, Universidade do Porto, Portugal  
Prof. Dr. Valter Machado da Fonseca, Universidade Federal de Viçosa, Brasil  
Prof.ª Dr.ª Vanessa Bordin Viera, Universidade Federal de Campina Grande, Brasil  
Prof.ª Dr.ª Vera Lúcia Vasiléviski dos Santos Araújo, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Brasil  
Prof. Dr. Wilson Noé Garcés Aguilar, *Corporación Universitaria Autónoma del Cauca, Colômbia*  
Prof. Dr. Xosé Somoza Medina, *Universidad de León, Espanha*

### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E82 Estudos em Ciências Exatas e da Terra: Desafios, Avanços e Possibilidades II / Organizador Alireza Mohebi Ashtiani. – Curitiba, PR: Artemis, 2024.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

Edição bilíngue

ISBN 978-65-81701-39-0

DOI 10.37572/EdArt\_271124390

1. Ciências exatas e da terra – Pesquisa – Brasil. I. Ashtiani, Alireza Mohebi.

CDD 509

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

## INTRODUÇÃO

A coletânea *Estudos em Ciências Exatas e da Terra: Desafios, Avanços e Possibilidades II* reúne contribuições significativas nas áreas de geociências, engenharia e física, com um foco particular na análise e solução de problemas complexos em diferentes contextos e regiões do mundo. Os artigos apresentados neste volume abordam desde questões geológicas e ambientais até modelos matemáticos avançados aplicados a problemas práticos, evidenciando a diversidade e a riqueza dos desafios contemporâneos enfrentados por pesquisadores nas Ciências Exatas e da Terra.

O primeiro artigo, *Feições Erosivas em Vargem Alta (Espírito Santo, Brasil)*, trata das dinâmicas de erosão no município de Vargem Alta, com um olhar atento aos processos naturais e suas consequências para o meio ambiente local. Em seguida, *Análise de Estabilidade de Talude no Município de Vargem Alta (ES)* oferece uma análise detalhada sobre a estabilidade de taludes e suas implicações para a segurança das áreas urbanas e rurais afetadas.

No artigo *Contribuição para o Zoneamento de Risco de Inundações Urbanas no Município de Lichinga, Província de Niassa, Moçambique*, o foco se desloca para a aplicação de metodologias para o zoneamento de risco de inundações, um tema de grande importância para o planejamento urbano e a segurança das populações em regiões vulneráveis.

No trabalho *Paleocanais na Plataforma Continental Interna do Rio Grande: Evidências de Variações Eustáticas Durante o Quaternário*, os autores investigam as evidências geológicas de mudanças eustáticas, proporcionando uma compreensão mais profunda dos eventos climáticos e ambientais que marcaram a história do planeta.

No campo da geografia e da agricultura, *Consolidação de Terras Agrícolas (Estudo de Caso Russo)* apresenta um estudo de caso sobre a reorganização da agricultura em uma região da Rússia, discutindo a viabilidade de práticas de consolidação de terras para otimizar o uso da terra e aumentar a produção agrícola.

Seguindo para a física aplicada, o artigo *1D Space-Time Solution of the Species Diffusion Equation with Double Entry Boundary in Spherical Foods* explora soluções matemáticas para a equação de difusão de espécies, com aplicação no setor alimentício, focando na modelagem de processos dentro de esferas alimentícias.

Em seguida, *Modelo Matemático de Difracción en Región de Fresnel Convergente y Divergente de una Lente Esférica* apresenta um modelo matemático inovador para a difração da luz em lentes esféricas, contribuindo para o campo da óptica e suas aplicações.

Por fim, *Caracterización de los Efectos de una Fulguración Solar* discute os impactos de eventos solares extremos, com foco nas implicações para a física espacial e para a proteção de tecnologias modernas sensíveis, como satélites e sistemas de comunicação.

Como é possível observar, este volume é uma contribuição valiosa para o avanço das Ciências Exatas e da Terra, apresentando uma ampla gama de pesquisas que têm o potencial de influenciar práticas em diversas áreas, desde a mitigação de riscos ambientais até o desenvolvimento de novas tecnologias e abordagens inovadoras em várias disciplinas. A variedade de temas e abordagens evidenciam a complexidade dos desafios que os pesquisadores enfrentam atualmente e reforçam a importância da colaboração interdisciplinar para o progresso científico.

Desejo a todos uma proveitosa leitura!

**Alireza Mohebi Ashtiani**

## SUMÁRIO

### **CAPÍTULO 1..... 1**

FEIÇÕES EROSIVAS EM VARGEM ALTA (ESPÍRITO SANTO, BRASIL)

Éder Carlos Moreira

Leonardo Coelho Fabrino Filho

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_2711243901](https://doi.org/10.37572/EdArt_2711243901)

### **CAPÍTULO 2..... 15**

ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE TALUDE NO MUNICÍPIO DE VARGEM ALTA (ES)

Éder Carlos Moreira

Eric José Cerqueira Gonçalves

Thiago Curty Vimercati

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_2711243902](https://doi.org/10.37572/EdArt_2711243902)

### **CAPÍTULO 3..... 27**

CONTRIBUIÇÃO PARA O ZONEAMENTO DE RISCO DE INUNDAÇÕES URBANAS NO MUNICÍPIO DE LICHINGA, PROVÍNCIA DE NIASSA, MOÇAMBIQUE

Americo José Fombe

Gustavo Sobrinho Dgedge

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_2711243903](https://doi.org/10.37572/EdArt_2711243903)

### **CAPÍTULO 4..... 47**

PALEOCANAIS NA PLATAFORMA CONTINENTAL INTERNA DO RIO GRANDE: EVIDÊNCIAS DE VARIAÇÕES EUSTÁTICAS DURANTE O QUATERNÁRIO

Laurício Corrêa Terra

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_2711243904](https://doi.org/10.37572/EdArt_2711243904)

### **CAPÍTULO 5..... 56**

AGRICULTURAL LAND CONSOLIDATION (RUSSIAN CASE STUDY)

Alexander Sagaydak

Anna Sagaydak

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_2711243905](https://doi.org/10.37572/EdArt_2711243905)



**CAPÍTULO 6..... 64**

1D SPACE-TIME SOLUTION OF THE SPECIES DIFFUSION EQUATION WITH DOUBLE ENTRY BOUNDARY IN SPHERICAL FOODS

Juan Ignacio González Pacheco

Mariela Beatriz Maldonado

Ariel Fernando Márquez Agüero

Paula Anabella Giorlando Videla

Leonel Nicolás Lisanti

Carla Rocío Zaragoza

Oscar Daniel Galvez

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_2711243906](https://doi.org/10.37572/EdArt_2711243906)

**CAPÍTULO 7 ..... 85**

MODELO MATEMÁTICO DE DIFRACCIÓN EN REGIÓN DE FRESNEL CONVERGENTE Y DIVERGENTE DE UNALENTE ESFÉRICA

Esteban Andrés Zárate

Quintiliano Angulo Córdova

Marian Cristina Ricárdez Torres

Omar Morales Alejos

Israel Benjamín Sánchez Jiménez

José Adán Hernández Nolasco

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_2711243907](https://doi.org/10.37572/EdArt_2711243907)

**CAPÍTULO 8..... 100**

CARACTERIZACIÓN DE LOS EFECTOS DE UNA FULGURACIÓN SOLAR

Guillermo Daniel Rodriguez

Ricardo Ezequiel Garcia

Leonardo José Navarria

Nicolas Quaglino

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_2711243908](https://doi.org/10.37572/EdArt_2711243908)

**SOBRE O ORGANIZADOR.....112**

**ÍNDICE REMISSIVO ..... 113**

# CAPÍTULO 7

## MODELO MATEMÁTICO DE DIFRACCIÓN EN REGIÓN DE FRESNEL CONVERGENTE Y DIVERGENTE DE UNALENTE ESFÉRICA

Data de submissão: 09/11/2024

Data de aceite: 18/11/2024

**Israel Benjamín Sánchez Jiménez**

Universidad Juárez  
Autónoma de Tabasco  
División Académica de  
Ciencias Básicas  
Cunduacán Tabasco, México

**Esteban Andrés Zárate**

Universidad Juárez  
Autónoma de Tabasco  
División Académica de  
Ciencias Básicas  
Cunduacán Tabasco, México  
<https://orcid.org/0000-0003-3515-5793>

**José Adán Hernández Nolasco**

Universidad Juárez  
Autónoma de Tabasco  
División Académica de Ciencias y  
Tecnologías de la Información  
Cunduacán Tabasco, México  
<https://orcid.org/0000-0003-4671-0350>

**Quintiliano Angulo Córdoba**

Universidad Juárez  
Autónoma de Tabasco  
División Académica de  
Ciencias Básicas  
Cunduacán Tabasco, México  
<https://orcid.org/0000-0002-9594-6311>

**Marian Cristina Ricárdez Torres**

Universidad Juárez  
Autónoma de Tabasco  
División Académica de  
Ciencias Básicas  
Cunduacán Tabasco, México

**Omar Morales Alejos**

Universidad Juárez  
Autónoma de Tabasco  
División Académica de  
Ciencias Básicas  
Cunduacán Tabasco, México

**RESUMEN:** El objetivo de este trabajo fue determinar el modelo matemático de difracción en las regiones de Fresnel convergente y divergente de un doblete cementado, utilizando el método de propagación del espectro angular. Se obtuvieron modelos de difracción mediante la convolución de transformadas de Fourier, con una distribución tipo Bessel de la suma de argumentos, asociada a la distribución de amplitud del campo de ondas de luz láser difractadas por dos aberturas circulares de radios diferentes. Los resultados teóricos fueron corroborados experimentalmente y mediante simulación computacional. Se concluyó que la suma de los argumentos permite interpretar el patrón de difracción como franjas de interferencia elípticas con distribución tipo Bessel. Además, el desfase

que experimentan las ondas difractadas al propagarse desde el plano objeto hasta la región de Fresnel convergente es de  $\pi/4$ , mientras que, al llegar a la región de Fresnel divergente del lente doblete cementado usado como lente transformador, el desfase es de  $3/4 \pi$ .

**PALABRAS CLAVE:** Difracción. Convolución. Fresnel convergente y divergente. Simulación computacional.

## MATHEMATICAL MODEL OF DIFFRACTION IN CONVERGENT AND DIVERGENT FRESNEL REGION OF A SPHERICAL LENS

**ABSTRACT:** The objective of this work was to determine the mathematical model of diffraction in the convergent and divergent Fresnel regions of a cemented doublet, employing the angular spectrum propagation method. Diffraction models were derived through the convolution of Fourier transforms, with a Bessel-type distribution of the sum of arguments, associated with the amplitude distribution of the laser light wave field diffracted by two circular apertures of differing radii. Theoretical results were corroborated both experimentally and through computational simulation. It was concluded that the summation of the arguments enables the interpretation of the diffraction pattern as elliptical interference fringes with a Bessel-type distribution. Furthermore, the phase shift experienced by the diffracted waves as they propagate from the object plane to the convergent Fresnel region is  $\pi/4$ , while upon reaching the divergent Fresnel region of the cemented doublet lens used as a transforming lens, the phase shift is  $3 \pi/4$ .

**KEYWORDS:** Diffraction. Convolution. Convergent and divergent Fresnel. Computational simulation.

### 1 INTRODUCCIÓN

El problema de difracción de luz coherente puede ser interpretado como el mapeo de la distribución de amplitud del campo óptico en algunas regiones del espacio, asociado a este problema existe la necesidad de describir la distribución de amplitud caracterizada por la función de transmitancia  $t(x, y)$  asociada a la abertura u objeto difractor en planos de la región convergente, divergente y focal de una lente esférica (Martínez *et al.*, 2001). (Sheppard & Hrynevych, 1992) realizaron el estudio de difracción por una abertura circular, en el que propusieron una generalización a la teoría de difracción de Fresnel, a través de una aproximación por variación paraboidal en vez de una variación binominal en los términos de fase en la ecuación. (Quintero *et al.*, 2006), estudiaron los efectos de difracción e interferencia producidos por una estructura compuesta de múltiples aberturas circulares idénticas, no reportan análisis de propagación, ni presentan un modelo matemático de difracción, ya que el trabajo lo realizaron sin el uso de lente transformadora.

(Zárate, 2011), realizó el estudio de propagación del campo difractado por dos aberturas de radios con igual magnitud, su análisis lo realizó hasta la región de Fraunhofer o de la transformada de Fourier, usando un doblete cementado como lente transformadora.

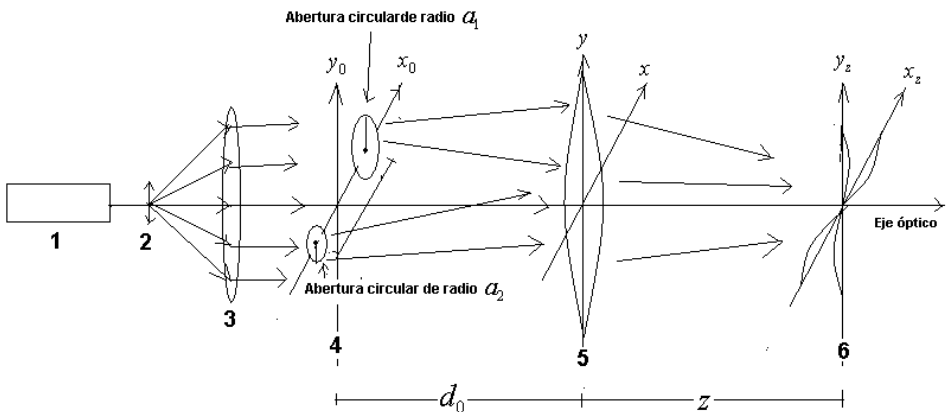
Mientras que (Zárate *et al.*, 2013), realizaron un análisis de propagación hasta el plano de enfoque o de Fraunhofer de un doblete cementado usado como transformador. además presentaron imágenes de patrones de difracción generados de forma experimental, en las cuales no se aprecia la geometría elíptica de las franjas de máxima y mínima intensidad, sin realizar un análisis de la propagación del campo de difracción hacia las regiones convergente y divergente de un lente doblete cementado usado como transformador.

En este trabajo, se reporta el estudio de propagación hasta la región de Fresnel convergente y divergente, de un lente doblete cementado del campo de difracción producido, por dos aberturas circulares con radios de diferente magnitud, contenidas en material laminado, iluminadas con ondas planas. El tratamiento se realizó bajo el formalismo del método de propagación del espectro angular.

## 2 MATERIALES Y MÉTODOS

El modelo matemático de difracción fue generado de acuerdo con el arreglo de la figura 1. Centrando el análisis de propagación del campo difractado por las dos aberturas (figura 1,4) colocadas en el plano  $x_0, y_0$ , de radios  $a_1$  y  $a_2$  de diferentes magnitudes iluminadas con ondas planas monocromáticas de amplitud constante  $E_0$ . La función de transmitancia que se le asocia al par de aberturas como objeto difractor es,  $t_0(x_0, y_0) = l_2 \text{circ}\left(\frac{r_0 - l_1}{a_1}\right) + l_2 \text{circ}\left(\frac{r_0 + l_1}{a_2}\right)$  (Goodman, 2005), siendo  $l_1$  la distancia a la que se encuentran desplazadas las aberturas circulares, respecto al origen de coordenadas del plano objeto  $x_0, y_0$  ver figura 1, cuyo espesor es  $l_2$  y  $r_0$  en coordenadas polares queda definido como  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ .

Figura 1. Procesador de Fourier usado para obtener patrones de difracción. Sobre la figura identificamos a: (1) laser de He-Ne, (2) filtro espacial, (3) colimador, (4) objeto bajo estudio en plano  $x_0, y_0$ , (5) lente transformadora, y (6) plano de observación  $x_z, y_z$ .



El campo de ondas monocromáticas difractadas por el objeto o aberturas circulares desplazadas del origen en la cantidad  $l_1$ , y distribuidas en el plano  $x_0, y_0$  está dado por la ecuación (1).

$$E_1(x_0, y_0) = E_0 t_0(x_0, y_0) = E_0 \left[ l_z \text{circ} \left( \frac{r_0 - l_1}{a_1} \right) + l_z \text{circ} \left( \frac{r_0 + l_1}{a_2} \right) \right] \quad (1)$$

(Andrés Zárata et al., 2013) determinaron que la distribución de amplitud del campo propagado hasta el plano  $x_z, y_z$ , en el que se distribuye, se obtiene mediante la ecuación (2), en la que se ha usado como condición inicial, que el objeto difractor esté colocado a la distancia  $d_0$ , la cual es la misma que la longitud focal de la lente transformadora ( $d_0 = f_{LD}$ ), además de considerar el teorema de la transformada de Fourier del producto de funciones (Gaskill, 1978).

$$G_z(u, v) = \frac{E_0 e^{ik[f_{LD} + z + n_{L1}\Delta_{L1} + n_{L2}\Delta_{L2}]} }{i\lambda f_{LD}} \left[ \mathfrak{F}\{t_0(x_0, y_0)\} \otimes \mathfrak{F} \left\{ e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(x_0^2 + y_0^2) \left(1 - \frac{z}{f_{LD}}\right)} \right\} \right]_{u = \frac{x_z}{\lambda f_{LD}}, v = \frac{y_z}{\lambda f_{LD}}} \quad (2)$$

La transformada de Fourier de la función de transmitancia  $t_0(x_0, y_0)$  en la ecuación (2) se obtiene usando el teorema de linealidad, escalamiento y desplazamiento (Gaskill, 1978); siendo  $\omega = \sqrt{u^2 + v^2}$  la frecuencia espacial definida en el plano de frecuencias espaciales  $uv$ , resultando

$$\mathfrak{F}\{t_0(x_0, y_0)\} = l_z \left[ a_1^2 e^{-in_1 l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right) + a_2^2 e^{+in_2 l_2 u} \left( \frac{J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right) \right] \quad (3)$$

En tanto que la transformada de Fourier de la Función exponencial de la ecuación (2) es:

$$\mathfrak{F} \left\{ e^{\frac{ik}{2f_{LD}}(x_0^2 + y_0^2) \left(1 - \frac{z}{f_{LD}}\right)} \right\} = \left( \frac{\lambda f_{LD}^2}{-i(f_{LD} - z)} \right) e^{-\frac{i\pi \lambda f_{LD}^2}{(f_{LD} - z)}(u^2 + v^2)} \quad (4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3) y (4) en la ecuación (2) se determina que la distribución de amplitud del campo difractado queda definida por la siguiente expresión:

$$G_{zC}(u, v) = e^{ik[f_{LD}+z+n_{L1}\Delta_{L1}+n_{L2}\Delta_{L2}]} \left( \frac{E_0 f_{LD}}{(f_{LD} - z)} \right) \bullet \left[ l_z \left[ a_1^2 e^{-i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right) + a_2^2 e^{+i2\pi l_1 u} \left( \frac{J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right) \right] \otimes e^{-\frac{i\pi \lambda_{LD}^2}{(f_{LD}-z)}(u^2+v^2)} \right]_{u=\frac{x_z}{\lambda_{LD}}, v=\frac{y_z}{\lambda_{LD}}} \quad (5)$$

Donde el símbolo  $\otimes$  significa la operación matemática de convolución, mientras que el símbolo  $\bullet$  significa la operación de multiplicación en la ecuación (5) y en ecuaciones subsiguientes.

### 3 RESULTADOS TEÓRICOS

La ecuación (5) establece que, el patrón de difracción  $G_{zC}(u, v)$  se ha propagado hasta la región de Fresnel (convergente) situada en el intervalo de distancia  $0 < z < f_{LD}$ , donde  $f_{LD}$  es la distancia focal de la lente transformadora (el cual se interpreta como un patrón de difracción derecho). Mediante el uso de la propiedad conmutativa de la convolución y a través de un proceso de integración la ecuación (5) se reescribe para esta región de Fresnel convergente en la forma dada por la ecuación (6). En esta ecuación, el desfase que ha sufrido el campo propagado desde el plano  $x_0 y_0$  hasta el plano  $x_z y_z$  en el intervalo arriba especificado, fue de  $\pi/4$  el cual se obtiene realizando la integral de convolución de la ecuación (5) y considerando que  $f_{LD} - z > 0$ .

$$G_z(u, v) = \frac{2l_z E_0 e^{ik[f_{LD}+z+n_{L1}\Delta_{L1}+n_{L2}\Delta_{L2}]} e^{-\frac{i\pi \lambda_{LD}^2 (f_{LD}-z) \cos^2 \phi}{\lambda_{LD}^2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\lambda(f_{LD} - z)}} \bullet \left[ a_1^2 e^{-i2\pi l_1 u} \frac{J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} + a_2^2 e^{i2\pi l_1 u} \frac{J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right] \quad (6)$$

El patrón de difracción propagado hasta la región de Fresnel (divergente) de la lente transformadora, situada en el intervalo de distancia  $f_{LD} < z < \infty$  se interpreta como un patrón de difracción izquierdo, quedando definido a través de la ecuación (7), el desfase en esta región fue de  $3\pi/4$ , mismo que se determina considerando que  $z - f_{LD} < 0$  y realizando la integral de convolución de la ecuación (5).

$$G_z(u, v) = e^{ik[f_{LD}+z+n_{L1}\Delta_{L1}+n_{L2}\Delta_{L2}]} \left( \frac{2l_z E_0}{\sqrt{\lambda(z - f_{LD})}} \right) e^{-i\frac{3\pi}{4}} \bullet e^{-\frac{i\pi \lambda_{LD}^2 (z-f_{LD}) \cos^2 \phi}{\lambda_{LD}^2}} \left[ a_1^2 e^{-i2\pi l_1 u} \frac{J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} + a_2^2 e^{i2\pi l_1 u} \frac{J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right] \quad (7)$$

Las distribuciones de intensidad para las regiones de Fresnel (convergente y divergente) de la lente transformadora, se determinan respectivamente por las ecuaciones (8) y (9).

$$I_z(u, v) = \left[ \frac{2(E_0 I_z f_{LD})^2}{\lambda(f_{LD} - z)} \right] \cos(2\pi l_1 u) \left[ (a_1^2)^2 \left[ \frac{J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right]^2 + \right. \\ \left. + 2a_1^2 a_2^2 \left[ \frac{J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right] \left[ \frac{J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right] + (a_2^2)^2 \left[ \frac{J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right]^2 \right] \quad (8)$$

$$I_z(u, v) = \left[ \frac{2(E_0 I_z f_{LD})^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right] \cos(2\pi l_1 u) \left[ (a_1^2)^2 \left[ \frac{J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right]^2 + \right. \\ \left. + 2a_1^2 a_2^2 \left[ \frac{J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right] \left[ \frac{J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right] + (a_2^2)^2 \left[ \frac{J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right]^2 \right] \quad (9)$$

Usando la expresión (10) para el producto de funciones Bessel  $J_1(2\pi a_1 \omega) J_1(2\pi a_2 \omega)$ , (Hayek, 2001; Andrés Zárata, 2011); considerando que los productos de las funciones Bessel.

$$J_1(2\pi a_1 \omega) J_1(2\pi a_2 \omega) = \frac{(\pi a_1 \omega)(\pi a_2 \omega)}{(\pi a_1 \omega + \pi a_2 \omega)} * \\ [2J_0(2\pi a_1 \omega) J_1(2\pi a_2 \omega) + 2J_1(2\pi a_1 \omega) J_0(2\pi a_2 \omega)] \\ - \frac{(\pi a_1 \omega)(\pi a_2 \omega)}{(\pi a_1 \omega + \pi a_2 \omega)} [J_1(2\pi a_1 \omega + 2\pi a_2 \omega)] + \\ + \frac{(\pi a_1 \omega)(\pi a_2 \omega)}{(\pi a_1 \omega + \pi a_2 \omega)} \sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s [J_s(2\pi a_1 \omega) J_{1+s}(2\pi a_2 \omega) + \\ + J_{1+s}(2\pi a_1 \omega) J_s(2\pi a_2 \omega)] \quad (10)$$

Definidos por la suma  $\sum_{s=2}^{s=\infty} (-1)^s [J_s(2\pi a_1 \omega) J_{1+s}(2\pi a_2 \omega) + J_{1+s}(2\pi a_1 \omega) J_s(2\pi a_2 \omega)]$ , no aportan información relevante a la distribución de intensidad por lo cual no se toman en cuenta y combinando la ecuación (10) con la ecuación (8), se obtiene que la distribución de intensidad en la región de Fresnel (convergente) de un lente doblete cementado o transformador es.

$$\begin{aligned}
I_z(u, v) = & \left[ \frac{2(E_0 J_z f_{LD})^2}{\lambda(f_{LD} - z)} \right]^2 \left[ \left( a_1^3 \right) \left[ \frac{a_1 J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right]^2 + \right. \\
& + 2a_1^2 a_2^2 \frac{(\pi a_1 \omega)(\pi a_2 \omega)}{(\pi a_1 \omega + \pi a_2 \omega)} \cos(4\pi l_1 u) \{ [2J_0(2\pi a_1 \omega) J_1(2\pi a_2 \omega)] + [2J_1(2\pi a_1 \omega) J_0(2\pi a_2 \omega)] \} - \\
& - 2a_1^2 a_2^2 \frac{(\pi a_1 \omega)(\pi a_2 \omega)}{(\pi a_1 \omega + \pi a_2 \omega)} \cos(4\pi l_1 u) \\
& \left. \bullet [J_1(2\pi a_1 \omega + 2\pi a_2 \omega)] + \left( a_2^3 \right) \left[ \frac{a_2 J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right]^2 \right] \quad (11)
\end{aligned}$$

La distribución de intensidad en la región de Fresnel (divergente) del doblete cementado o transformador, se determina considerando que la suma de funciones Bessel del párrafo anterior, en la ecuación (10) no aporta información relevante, bajo esta condición la ecuación (9) se reescribe en la forma:

$$\begin{aligned}
I_z(u, v) = & \left[ \frac{2(E_0 J_z f_{LD})^2}{\lambda(z - f_{LD})} \right]^2 \left[ \left( a_1^3 \right) \left[ \frac{a_1 J_1(2\pi a_1 \omega)}{\omega} \right]^2 + \right. \\
& + 2a_1^2 a_2^2 \frac{(\pi a_1 \omega)(\pi a_2 \omega)}{(\pi a_1 \omega + \pi a_2 \omega)} \cos(4\pi l_1 u) \{ [2J_0(2\pi a_1 \omega) J_1(2\pi a_2 \omega)] + [2J_1(2\pi a_1 \omega) J_0(2\pi a_2 \omega)] \} - \\
& - 2a_1^2 a_2^2 \frac{(\pi a_1 \omega)(\pi a_2 \omega)}{(\pi a_1 \omega + \pi a_2 \omega)} \cos(4\pi l_1 u) \\
& \left. \bullet [J_1(2\pi a_1 \omega + 2\pi a_2 \omega)] + \left( a_2^3 \right) \left[ \frac{a_2 J_1(2\pi a_2 \omega)}{\omega} \right]^2 \right] \quad (12)
\end{aligned}$$

En la ecuación (11) la distribución del patrón de difracción que se propaga en la región de Fresnel (convergente) de la lente transformadora, difiere solo en el denominador de la distribución de intensidad definida con la ecuación (12) del patrón de difracción izquierdo que se propaga en la región de Fresnel (divergente) de la lente transformadora. Las ecuaciones (11) y (12) nos permiten afirmar que en las regiones de Fresnel convergente y divergente del lente doblete cementado usado como transformador, existe un patrón de difracción elíptico de distribución tipo Bessel con suma de argumentos, que modula franjas lineales de Young.

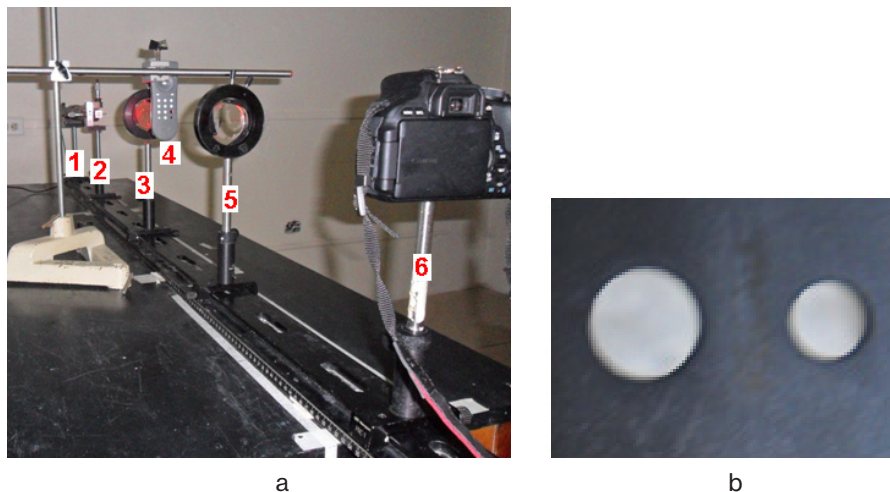
#### 4 RESULTADOS EXPERIMENTALES

Los experimentos se desarrollaron empleando el sistema óptico de la Fig. 2a, el cual está en relación directa con el esquema de la Fig. 1. El haz de luz de láser de He-Ne ( $\lambda = 632 \text{ nm}$ ) ampliado y filtrado con objetivo de microscopio 40X y pinhole de  $50 \mu\text{m}$ , fue



colimado con lente doblete cementado acromático de 50 *cm* de distancia focal. Como objeto difractor, se usaron dos aberturas circulares, su imagen se muestra en la Fig. 2b, cuyos radios de curvatura son:  $a_1 = 1.0 \text{ mm}$  y  $a_2 = 1.5 \text{ mm}$ , respectivamente. Contenidas en material laminado de plástico con  $l_z = 2.0 \text{ mm}$  de espesor. Se uso como transformador un doblete acromático cementado de 25 *cm* de distancia focal. Las imágenes de cada patrón de difracción en intensidad se grabaron usando una cámara digital de alta velocidad y precisión, con sensor CMOS y 18.0 megapíxeles.

Figura 2. a) Arreglo experimental, b) Aberturas con radios de diferente magnitud.



En la región de Fresnel convergente situada en el intervalo de distancia  $0 < z < f_{LD}$  de la lente transformadora, se obtiene la convolución de transformadas de Fourier, cuantitativamente los podemos relacionar con los valores exactos dados por la ecuación (11) y se consideran patrones de difracción derechos. La Fig. 3. a, b y d muestran la distribución de intensidad, de los campos de difracción de convolución grabados a diferentes distancias, ver Tabla I, en la región de Fresnel convergente del doblete cementado, puede observarse que el patrón de difracción está formado por franjas elípticas con distribución tipo Bessel de suma de argumentos modulando franjas de Young, lo cual se hace más relevante en la imagen de la Fig. 3d.

Las imágenes de la Fig. 3c y 3e se consideran izquierdas y dan referencia del grabado de patrones de difracción en distribución de intensidad, en la zona de Fresnel divergente o de convolución de las transformada de Fourier, situada en el intervalo de distancias  $f_{LD} < z < \infty$  de la lente transformadora; se observa que cada patrón contiene mínimos y máximos de irradiancia alternados, cuantitativamente se pueden relacionar con los valores exactos dados por la ecuación (12), además se ve que cada patrón de

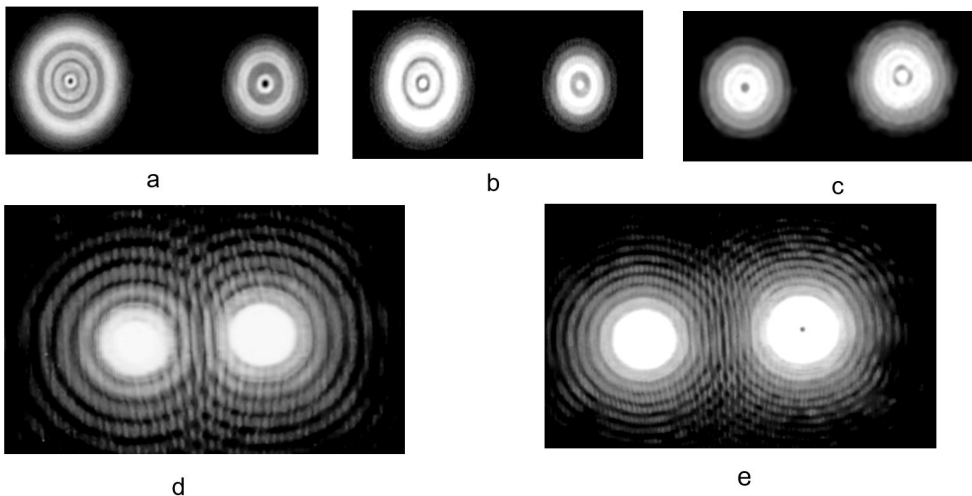
difracción está formado por franjas elípticas con distribución tipo Bessel de suma de argumentos, modulando franjas de Young.

Las imágenes de la Fig. 3, fueron generadas cuando los centros geométricos de las aberturas circulares Fig. 2, se orientaron paralelos al eje  $x_0$  del plano objeto. Además, la Fig. 3a, muestra mínimos de irradiancia centrales en cada patrón, se establece que es más dominante la función de Bessel de orden uno en el producto con la función de Bessel de orden cero a la distancia  $z=22\text{cm}$  de propagación. Mientras que a la distancia de propagación  $z=23\text{cm}$  y  $z=24\text{cm}$ , la función de Bessel de orden cero es la dominante en el producto dando máximos centrales de difracción, ver Figs. 3b y 3d. También se observa que, conforme se acerca el plano de grabado a la distancia focal de  $25\text{cm}$  de la lente transformadora los máximos centrales en cada patrón se amplifican Fig. 3d. Respecto a las imágenes de la Fig. 3c y 3e se consideran izquierdas, al ser grabadas en la zona de Fresnel divergente, en ellas se observa que cada patrón contiene mínimos y máximos de intensidad alternados en la región central.

Tabla I. Distancia objeto lente y lente plano de grabado, centros geométricos paralelos al eje  $x_0$ .

Distancia lente objeto difractor $d_0$ .	Distancia lente plano de grabado $z$	Número de imagen
<i>25cm</i>	<i>22cm</i>	<i>3a</i>
<i>25cm</i>	<i>23cm</i>	<i>3b</i>
<i>25cm</i>	<i>48cm</i>	<i>3c</i>
<i>25cm</i>	<i>24cm</i>	<i>3d</i>
<i>25cm</i>	<i>35cm</i>	<i>3e</i>

Figura 3. a, b, c, d y e, patrones de difracción obtenidos experimentalmente grabados en la región de Fresnel convergente y divergente de un doblete cementado.



La Fig. 4a, 4b muestran la distribución de intensidad, de los campos de difracción de convolución grabados a diferentes distancias de la lente transformadora ver Tabla II, cuantitativamente los podemos relacionar con los valores exactos dados por la ecuación (11) y se consideran derechos, en la región de Fresnel (convergente) del doblete cementado, puede observarse que el patrón de difracción está formado por franjas elípticas con distribución tipo Bessel modulando franjas de Young. Las imágenes de la Fig. 4a y 4b, fueron generadas cuando los centros geométricos de las aberturas circulares figura 2, se orientaron paralelas al eje  $y_0$  del plano objeto. La imagen de la Fig. 4a, muestra un máximo y un mínimo de irradiancia centrales en cada patrón, se establece que en el patrón superior es más dominante la función de Bessel de orden cero que la función de Bessel de orden uno, en el producto con la función de Bessel a la distancia  $z=20cm$ ; mientras que en el patrón de difracción inferior es dominante la función de Bessel de orden uno más que la de orden cero en el producto de acuerdo con la ecuación (11). A la distancia de propagación  $z=24cm$ , la función de Bessel de orden cero es la dominante en el producto generando máximos centrales de difracción ver Fig. 4b. Se observa que conforme se acerca el plano de grabado a la distancia focal de la lente transformadora los máximos centrales en cada patrón de difracción se amplifican.

Mientras que la imagen del patrón de difracción de la Fig. 4c se considera izquierdo y fue grabada en la zona de Fresnel (divergente) o de convolución de la lente transformadora; se observa que cada patrón contiene mínimos y máximos de irradiancia alternados en su parte central, puede distinguir en la figura 4c, que el patrón de difracción está formado por franjas elípticas con distribución tipo Bessel modulando franjas de Young.

Figura 4. a), b), c) Patrones de difracción obtenidos experimentalmente y grabados en la región de Fresnel convergente y divergente del lente doblete cementado.

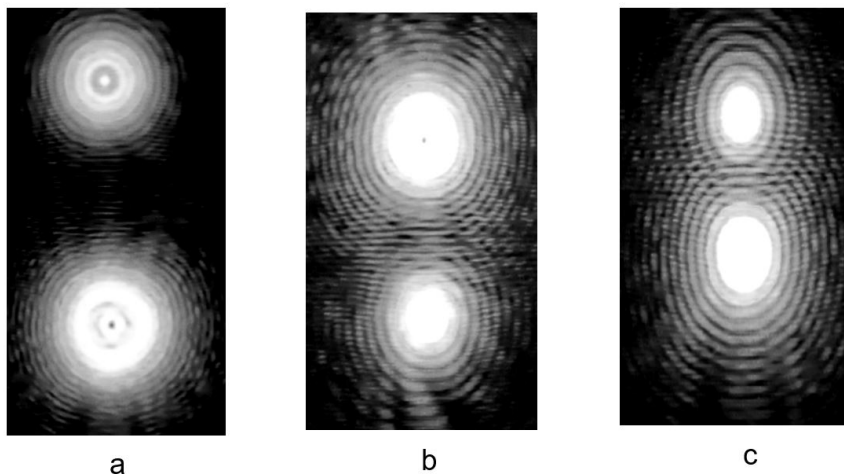


Tabla II. Distancia objeto lente y lente plano de grabado, centros geométricos paralelos al eje  $y_0$ .

Distancia lente objeto difractor $d_0$ .	Distancia lente plano de grabado $z$ .	Número de imagen
25cm	20cm	4a
25cm	23cm	4b
25cm	48cm	4c

## 5 SIMULACIÓN

La simulación computacional permite de una forma visual y práctica validar los resultados del modelo matemático de difracción, en este caso empleamos el método numérico “Beam Propagation Method”, que es una herramienta computacional ampliamente utilizada en óptica, y es una técnica numérica viable para el cálculo de haces ópticos en propagación libre, con pequeñas o nulas variaciones en el índice de refracción (Schmidt, 2010).

El algoritmo se implementó en el software matemático MatLab, para emular la propagación del haz laser de onda plana con longitud de onda de 632 nm, por dos aberturas circulares de radios de diferentes magnitudes de  $a_1 = 1.0 \text{ mm}$  y  $a_2 = 1.5 \text{ mm}$  respectivamente, tomadas como objeto difractor. Se construyo una malla de  $60 \times 60 \text{ mm}$ , considerando 975 muestras tanto para el eje  $x$ , como para el eje  $y$ . La distancia entre los centros de las dos aberturas es de 7 mm.

Una lente es un objeto de fase, para emular un doblete acromático y cementado, consideramos un retardo de fase entregado por una lente esférica perfecta convergente con una longitud focal de 25 cm. El objeto difractor se colocó a la distancia fija  $d_0 = 25 \text{ cm}$ , que es equivalente a la distancia focal frontal del doblete cementado. Los diferenciales en el eje de propagación  $z$  son  $dz = 20 \text{ mm}$ .

Para cada valor diferencial  $dz$  se obtuvo una gráfica de intensidad del haz óptico difractado, guardando las imágenes presentadas en la Fig. 5a, 5b, 5c, 5d y 5e correspondientes a las mismas distancias  $z$  a las que se tomaron las fotografías de la Fig. 3 en la parte experimental, ver Tabla I, dentro de la zona de Fresnel convergente; así como las del caso de la zona de Fresnel divergente del doblete cementado; además, para este caso de simulación también se consideró que los centros geométricos de las aberturas fueron orientados en el eje  $x_0$ . Para el caso de los centros geométricos paralelos al eje  $y_0$  se obtuvo una gráfica de intensidad del haz óptico difractado, guardando las imágenes simuladas, las cuales se muestran en la Fig. 6a, 6b y 6c, y corresponden a las mismas distancias  $z$  a la lente de acuerdo con la Tabla II, a las que se

tomaron las imágenes en la etapa experimental, tanto en la zona de Fresnel convergente y divergente del doblete cementado.

Figura 5. a, b, c, d y e. Gráficas de intensidad de un haz de luz, producidas grabadas mediante simulación computacional.

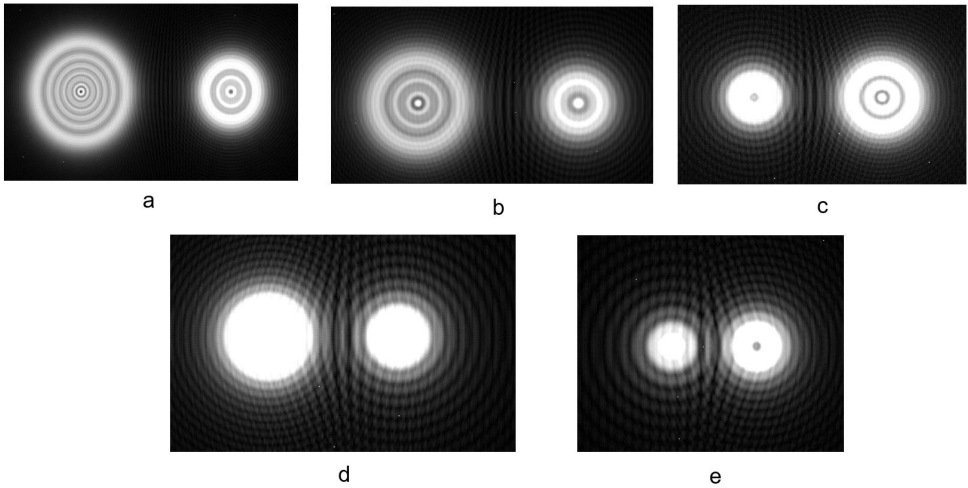
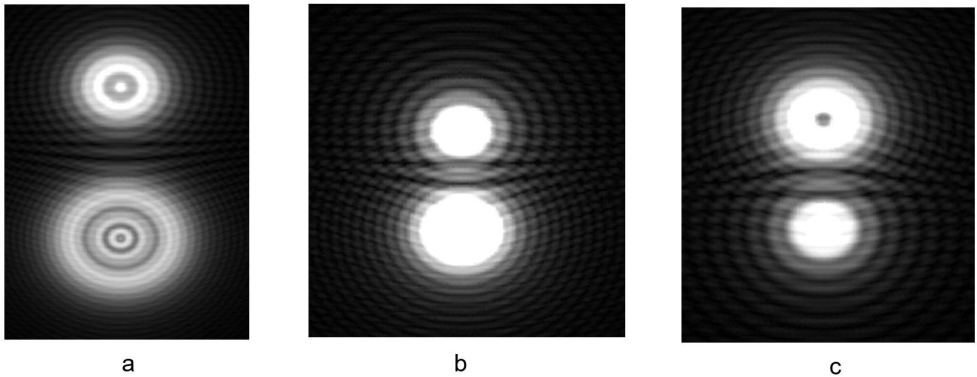


Figura 6. a, b y c. Graficas de intensidad de un haz de luz, producidas grabadas mediante simulación computacional.

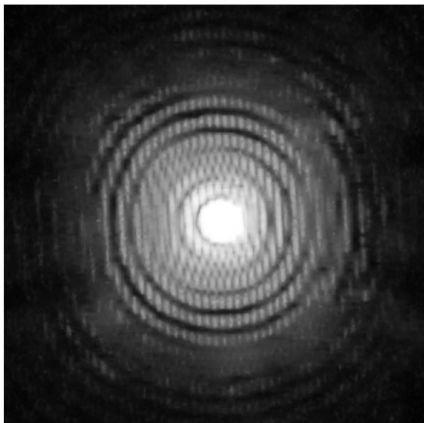


En lo que respecta a las imágenes de la Fig. 7a y 7b, ellas fueron producidas y grabadas de forma experimental en el plano focal, de Fraunhofer o de la transformada de Fourier, situado a la distancia  $z=25\text{cm}$  de la lente doblete cementado o transformadora. La imagen de la Fig. 7a corresponde al patrón de difracción de franjas elípticas, producido por las dos aberturas circulares cuyos centros de curvatura estuvieron orientados en el eje  $x_0$  del plano objeto, modulando franjas verticales de Young. Por la forma en que la lente hace converger la información, las franjas elípticas de máxima y mínima intensidad, quedan orientadas hacia el eje  $v$  en el espacio de frecuencias espaciales. La imagen de

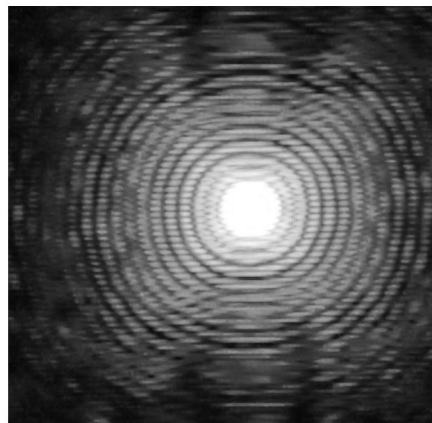
la Fig. 7b, muestra el patrón de difracción de transformada de Fourier, producido por el mismo par de aberturas circulares, con centros de curvatura paralelos ahora hacia el eje  $y_0$  del plano objeto, en este caso las franjas elípticas están orientadas hacia el eje  $u$  en el espacio de frecuencias espaciales, también modulando franjas horizontales de Young.

En la Fig. 7. c) y d) se muestran los patrones de difracción simulados de transformada de Fourier, obtenidos en el plano focal o de Fraunhofer de la lente, las líneas de difracción de Young son bastante claras y bien definidas, y se aprecia su orientación horizontal y vertical. En tanto que las franjas de Bessel se distribuyen como las obtenidas de forma experimental ver Fig. 7a y 7b; es decir, las franjas de mínima y de máxima intensidad son elípticas, como lo predijeron Zárate *et al* (2013).

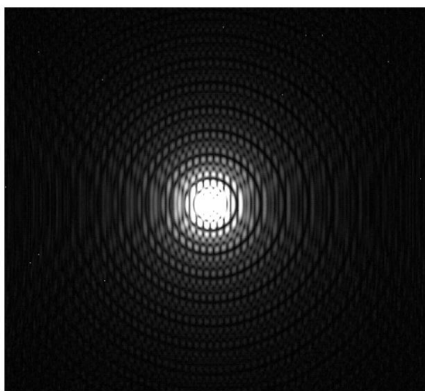
Figura 7 a, b. Patrones de difracción de transformada Fourier generados y grabados experimentalmente. Mientras que los de las figuras c y d, fueron generadas mediante simulación en computadora.



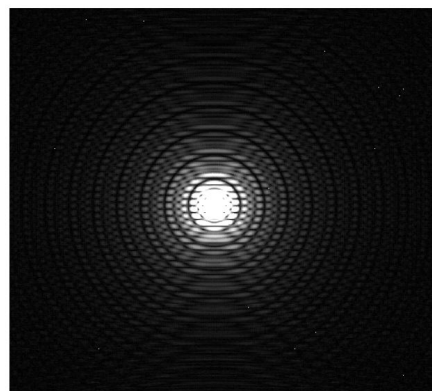
a



b



c



d

El Teorema de rotación publicado por Bracewell (2002), estableció que: Si una función  $f(x, y)$  es rotada en el plano  $xy$ , entonces su transformada de Fourier  $g(u, v)$  es rotada en el plano de frecuencias espaciales  $uv$  a través del mismo ángulo y en el mismo sentido. En base al teorema antes referido basta establecer que la transformada de Fourier es sensible a rotación, con lo cual se establece que los patrones de difracción mostrados en las Figs. 7a y 7b no son iguales, es decir, tienen distribución tipo Bessel y son de geometría elíptica, en el primer patrón de difracción el semieje mayor está en la dirección del eje de las frecuencias espaciales  $v$ , mientras que en el segundo patrón de difracción el semieje mayor está en la dirección de eje de frecuencias espaciales  $u$ , en base a que las aberturas circulares, ha sufrido una rotación de  $\frac{\pi}{2}$  respecto del eje  $x_0$  en el plano objeto.

## 6 CONCLUSIONES

Los modelos matemáticos de convolución de transformadas de Fourier ecuaciones (11) y (12), permiten establecer que las funciones de Bessel de orden uno son las dominantes en los productos para generar los mínimos de la figura 3a; mientras que las funciones de Bessel de orden cero son dominantes para generar los máximos de irradiancia central ver Figs. 3b, 3d y 4b. Por lo que se refiere a las Figs. 3c, 3e, 4a y 4c se observa que a las distancias que se grabaron ver Tablas 1 y 2, se alternan tanto la función de Bessel de orden uno, como la de orden cero en los productos, para producir de manera simultánea un mínimo y un máximo de irradiancia centrales.

Es de importancia documentar el desfase de  $\frac{\pi}{4}$  que sufren las ondas difractadas, al propagarse desde el plano objeto hasta la zona de Fresnel convergente del doblete cementado usado como lente transformadora. Mientras que, al propagarse el campo difractado hasta la zona de Fresnel divergente de la lente transformadora, sufre un desfase de  $\frac{3\pi}{4}$ . Basta recordar que, Zárate *et al*, (2013) publicaron que el desfase de  $\frac{\pi}{2}$  que sufrió el campo difractado al propagarse desde el plano objeto hasta el plano en la zona de Fraunhofer, de enfoque o de la transformada de Fourier de la lente transformadora. Esto permite concluir que el campo de difracción al propagarse se desfasa de acuerdo con la zona en el que se desea grabar su distribución de intensidad.

Se observa de la Figs. 4b y 4c que, conforme esté el plano de grabado o de Fresnel convergente o divergente, próximas al plano de enfoque o de Fraunhofer, también conocido como el plano de la transformada de Fourier, los resultados de tipo experimental mostrados, así como los mostrados en las Figs. 7a y 7b refuerzan, lo publicado por Zárate *et al*, (2013) en lo referente a las imágenes de transformada de Fourier, en ellas se hace evidente la forma elíptica del patrón de difracción.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrés Zárate, E. (2011). *Estudio de Patrones de Difracción, en la Evaluación de Aberturas* [Tesis de doctorado]. INAOE.

Andrés Zárate, E., Angulo Córdova, Q., Hernández Nolasco, J. A., Gutiérrez Tepach, G., & Treviño Palacios, C. G. (2013). Elliptical Bessel-like Diffraction Pattern Produced by Circular Apertures with Different Radius. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, 8785, 1-6.

Bracewell, R. N. (2002). *The Fourier transform and its applications*. McGraw Hill.

Gaskill, J. D. (1978). *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics*. John Wiley & Sons.

Goodman, J. W. (2005). *Introduction to Fourier Optics* (3.a ed.). McGraw Hill.

Hayek, S. I. (2001). *Advanced mathematica methods in science and engineering*. Marcel Dekker.

Martínez-Niconoff, G., Muñoz-Lopez, J., & Méndez-Martínez, E. (2001). Description of phase singularities and their application to focusing design. *Journal of the Optical Society of America. A, Optics, Image Science, and Vision*, 18(9), 2089-2094.

Quintero, O., Barrera, J. F., Henao, R., & Medina, F. F. (2006). Prevailing effects of interference or diffraction by multiple apertures. *Optics Communications*, 266(2), 558-561.

Schmidt, J. D. (2010). *Numerical simulation of optical wave propagation: With examples in MATLAB*. SPIE PRESS.

Sheppard, C. J. R., & Hrynevych, M. (1992). Diffraction by a circular aperture: A generalization of Fresnel diffraction theory. *JOSA A*, 9(2), 274-281.



## SOBRE O ORGANIZADOR

**Alireza Mohebi Ashtiani** possui graduação em bacharelado em Matemática, Matemática Aplicada, pela Amirkabir University of Technology (Polytechnic of Tehran), Teerã/Irã (2003), mestrado em Matemática Aplicada pelo Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan/Irã (2005) e doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) na área de Automação (2012). Foi bolsista de Pós-doutorado Júnior do CNPq no Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC/UNICAMP) e bolsista de Pós-doutorado da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) na Faculdade de Ciências Aplicadas da Universidade Estadual de Campinas (FCA/UNICAMP). Desde 2013 é docente vinculado ao Departamento Acadêmico de Matemática do Campus Londrina da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), e atualmente, docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UTFPR, Campus Cornélio Procopio.

Alireza Mohebi Ashtiani

<http://lattes.cnpq.br/5025709771742662>

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

Agricultural land consolidation 56, 57, 58, 59, 61, 62, 63

### B

Boundary conditions 64, 65, 69, 70, 72, 74, 80, 81

### C

Climatología 100, 102, 109, 110

Convolución 85, 86, 89, 92, 94, 98

### D

Danos 15, 16, 27

Deslizamentos 15, 16, 18, 19, 20, 21, 24

Difracción 85, 86, 87, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99

### E

Effective diffusivity 65, 66, 67, 69, 79, 82

Espacial 33, 39, 87, 88, 100, 102, 109, 110

### F

Feições erosivas 1, 2, 7, 9, 10, 12, 13

Fresnel convergente y divergente 85, 86, 87, 91, 93, 94, 96

Fulguración 100, 102, 104, 106, 109

### G

Geotecnia 13, 15, 26

### H

Hollow spherical foods 65, 81

### I

Inundação urbana 27, 38, 39

Ionosonda 100, 104

## L

Land market 56, 57, 60, 61, 62

## M

Magnetómetro 100

Mass diffusion 65

Mathematical model 64, 65, 66, 81, 86

Metodologia 7, 17, 27, 31, 36, 37, 50, 65

Movimentos de massa 1, 10, 11, 12, 15, 16, 18, 20, 23, 24

## P

Paleocanais 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54

## Q

Quaternário 47, 48, 50, 52, 53, 54

## R

Rent regulation 56

Republic of Kalmykia 56, 61, 63

Riometro 100, 107, 108, 109, 110

Risco 5, 7, 20, 26, 27, 28, 30, 33, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 45

Riscos geológicos 15

Russia 56, 57, 58, 59, 62, 63

## S

Simulación computacional 85, 86, 95, 96

Sísmica de alta resolução 47

Sol 100

## U

Uso e ocupação do solo 1, 10, 11, 36

## V

Variações Eustáticas 47, 48, 49, 52, 53, 54