

José Luis Escamilla Reyes  
(organizador)

**EDUCAÇÃO**  
**E**  
**ENSINO**  
**DE**  
**CIÊNCIAS EXATAS**  
**E**  
**NATURAIS**

**VOL II**



**EDITORA  
ARTEMIS  
2024**

José Luis Escamilla Reyes  
(organizador)

**EDUCAÇÃO**  
**E**  
**ENSINO**  
**DE**  
**CIÊNCIAS EXATAS**  
**E**  
**NATURAIS**

**VOL II**



**EDITORA  
ARTEMIS  
2024**



O conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição Creative Commons Atribuição-Não-Comercial NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0). Direitos para esta edição cedidos à Editora Artemis pelos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento, desde que sejam atribuídos créditos aos autores, e sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

A responsabilidade pelo conteúdo dos artigos e seus dados, em sua forma, correção e confiabilidade é exclusiva dos autores. A Editora Artemis, em seu compromisso de manter e aperfeiçoar a qualidade e confiabilidade dos trabalhos que publica, conduz a avaliação cega pelos pares de todos manuscritos publicados, com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

<b>Editora Chefe</b>	Prof. <sup>a</sup> Dr. <sup>a</sup> Antonella Carvalho de Oliveira
<b>Editora Executiva</b>	M. <sup>a</sup> Viviane Carvalho Mocellin
<b>Direção de Arte</b>	M. <sup>a</sup> Bruna Bejarano
<b>Diagramação</b>	Elisangela Abreu
<b>Organizador</b>	Prof. Dr. José Luis Escamilla Reyes
<b>Imagem da Capa</b>	ekaart/123RF
<b>Bibliotecário</b>	Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

#### Conselho Editorial

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ada Esther Portero Ricol, *Universidad Tecnológica de La Habana “José Antonio Echeverría”*, Cuba  
Prof. Dr. Adalberto de Paula Paranhos, Universidade Federal de Uberlândia, Brasil  
Prof. Dr. Agustín Olmos Cruz, *Universidad Autónoma del Estado de México*, México  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Amanda Ramalho de Freitas Brito, Universidade Federal da Paraíba, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ana Clara Monteverde, *Universidad de Buenos Aires*, Argentina  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ana Júlia Viamonte, Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP), Portugal  
Prof. Dr. Ángel Mujica Sánchez, *Universidad Nacional del Altiplano*, Peru  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Angela Ester Mallmann Centenaro, Universidade do Estado de Mato Grosso, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Begoña Blandón González, *Universidad de Sevilla*, Espanha  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Carmen Pimentel, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Catarina Castro, Universidade Nova de Lisboa, Portugal  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cirila Cervera Delgado, *Universidad de Guanajuato*, México  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cláudia Neves, Universidade Aberta de Portugal  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cláudia Padovesi Fonseca, Universidade de Brasília-DF, Brasil  
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos, Universidade Federal da Grande Dourados, Brasil  
Prof. Dr. David García-Martul, *Universidad Rey Juan Carlos de Madrid*, Espanha  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Deuzimar Costa Serra, Universidade Estadual do Maranhão, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Dina Maria Martins Ferreira, Universidade Estadual do Ceará, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Edith Luévano-Hipólito, *Universidad Autónoma de Nuevo León*, México  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Eduarda Maria Rocha Teles de Castro Coelho, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Portugal  
Prof. Dr. Eduardo Eugênio Spers, Universidade de São Paulo (USP), Brasil  
Prof. Dr. Eloi Martins Senhoras, Universidade Federal de Roraima, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Elvira Laura Hernández Carballido, *Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*, México



Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Emilas Darlene Carmen Lebus, *Universidad Nacional del Nordeste/ Universidad Tecnológica Nacional, Argentina*  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Erla Mariela Morales Morgado, *Universidad de Salamanca, Espanha*  
Prof. Dr. Ernesto Cristina, *Universidad de la República, Uruguay*  
Prof. Dr. Ernesto Ramírez-Briones, *Universidad de Guadalajara, México*  
Prof. Dr. Fernando Hitt, *Université du Québec à Montréal, Canadá*  
Prof. Dr. Gabriel Díaz Cobos, *Universitat de Barcelona, Espanha*  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Gabriela Gonçalves, Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP), Portugal  
Prof. Dr. Geoffroy Roger Pointer Malpass, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Gladys Esther Leoz, *Universidad Nacional de San Luis, Argentina*  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Glória Beatriz Álvarez, *Universidad de Buenos Aires, Argentina*  
Prof. Dr. Gonçalo Poeta Fernandes, Instituto Politécnico da Guarda, Portugal  
Prof. Dr. Gustavo Adolfo Juarez, *Universidad Nacional de Catamarca, Argentina*  
Prof. Dr. Guillermo Julián González-Pérez, *Universidad de Guadalajara, México*  
Prof. Dr. Håkan Karlsson, *University of Gothenburg, Suécia*  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Iara Lúcia Tescarollo Dias, Universidade São Francisco, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Isabel del Rosario Chiyon Carrasco, *Universidad de Piura, Peru*  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Isabel Yohena, *Universidad de Buenos Aires, Argentina*  
Prof. Dr. Ivan Amaro, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil  
Prof. Dr. Iván Ramon Sánchez Soto, *Universidad del Bío-Bío, Chile*  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ivânia Maria Carneiro Vieira, Universidade Federal do Amazonas, Brasil  
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz, *University of Miami and Miami Dade College, Estados Unidos*  
Prof. Dr. Jesús Montero Martínez, *Universidad de Castilla - La Mancha, Espanha*  
Prof. Dr. João Manuel Pereira Ramalho Serrano, Universidade de Évora, Portugal  
Prof. Dr. Joaquim Júlio Almeida Júnior, UniFIMES - Centro Universitário de Mineiros, Brasil  
Prof. Dr. Jorge Ernesto Bartolucci, *Universidad Nacional Autónoma de México, México*  
Prof. Dr. José Cortez Godinez, Universidad Autónoma de Baja California, México  
Prof. Dr. Juan Carlos Cancino Diaz, Instituto Politécnico Nacional, México  
Prof. Dr. Juan Carlos Mosquera Feijoo, *Universidad Politécnica de Madrid, Espanha*  
Prof. Dr. Juan Diego Parra Valencia, *Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín, Colômbia*  
Prof. Dr. Juan Manuel Sánchez-Yañez, *Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México*  
Prof. Dr. Juan Porras Pulido, *Universidad Nacional Autónoma de México, México*  
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Brasil  
Prof. Dr. Leinig Antonio Perazolli, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Livia do Carmo, Universidade Federal de Goiás, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Luciane Spanhol Bordignon, Universidade de Passo Fundo, Brasil  
Prof. Dr. Luis Fernando González Beltrán, *Universidad Nacional Autónoma de México, México*  
Prof. Dr. Luis Vicente Amador Muñoz, *Universidad Pablo de Olavide, Espanha*  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Macarena Esteban Ibáñez, *Universidad Pablo de Olavide, Espanha*  
Prof. Dr. Manuel Ramiro Rodriguez, *Universidad Santiago de Compostela, Espanha*  
Prof. Dr. Manuel Simões, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Márcia de Souza Luz Freitas, Universidade Federal de Itajubá, Brasil  
Prof. Dr. Marcos Augusto de Lima Nobre, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Brasil  
Prof. Dr. Marcos Vinicius Meiado, Universidade Federal de Sergipe, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Mar Garrido Román, *Universidad de Granada, Espanha*  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Margarida Márcia Fernandes Lima, Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> María Alejandra Arecco, *Universidad de Buenos Aires, Argentina*  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Aparecida José de Oliveira, Universidade Federal da Bahia, Brasil  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Carmen Pastor, *Universitat Jaume I, Espanha*

Prof.ª Dr.ª Maria da Luz Vale Dias – Universidade de Coimbra, Portugal  
 Prof.ª Dr.ª Maria do Céu Caetano, Universidade Nova de Lisboa, Portugal  
 Prof.ª Dr.ª Maria do Socorro Saraiva Pinheiro, Universidade Federal do Maranhão, Brasil  
 Prof.ª Dr.ª MªGraça Pereira, Universidade do Minho, Portugal  
 Prof.ª Dr.ª Maria Gracinda Carvalho Teixeira, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Brasil  
 Prof.ª Dr.ª María Guadalupe Vega-López, *Universidad de Guadalajara, México*  
 Prof.ª Dr.ª Maria Lúcia Pato, Instituto Politécnico de Viseu, Portugal  
 Prof.ª Dr.ª Maritza González Moreno, *Universidad Tecnológica de La Habana, Cuba*  
 Prof.ª Dr.ª Mauriceia Silva de Paula Vieira, Universidade Federal de Lavras, Brasil  
 Prof. Dr. Melchor Gómez Pérez, Universidad del País Vasco, Espanha  
 Prof.ª Dr.ª Ninfa María Rosas-García, Centro de Biotecnología Genómica-Instituto Politécnico Nacional, México  
 Prof.ª Dr.ª Odara Horta Boscolo, Universidade Federal Fluminense, Brasil  
 Prof. Dr. Osbaldo Turpo-Gebera, *Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, Peru*  
 Prof.ª Dr.ª Patrícia Vasconcelos Almeida, Universidade Federal de Lavras, Brasil  
 Prof.ª Dr.ª Paula Arcoverde Cavalcanti, Universidade do Estado da Bahia, Brasil  
 Prof. Dr. Rodrigo Marques de Almeida Guerra, Universidade Federal do Pará, Brasil  
 Prof. Dr. Saulo Cerqueira de Aguiar Soares, Universidade Federal do Piauí, Brasil  
 Prof. Dr. Sérgio Bitencourt Araújo Barros, Universidade Federal do Piauí, Brasil  
 Prof. Dr. Sérgio Luiz do Amaral Moretti, Universidade Federal de Uberlândia, Brasil  
 Prof.ª Dr.ª Silvia Inés del Valle Navarro, *Universidad Nacional de Catamarca, Argentina*  
 Prof.ª Dr.ª Solange Kazumi Sakata, Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares (IPEN)- USP, Brasil  
 Prof.ª Dr.ª Stanislava Kashtanova, *Saint Petersburg State University, Russia*  
 Prof.ª Dr.ª Susana Álvarez Otero – Universidad de Oviedo, Espanha  
 Prof.ª Dr.ª Teresa Cardoso, Universidade Aberta de Portugal  
 Prof.ª Dr.ª Teresa Monteiro Seixas, Universidade do Porto, Portugal  
 Prof. Dr. Valter Machado da Fonseca, Universidade Federal de Viçosa, Brasil  
 Prof.ª Dr.ª Vanessa Bordin Viera, Universidade Federal de Campina Grande, Brasil  
 Prof.ª Dr.ª Vera Lúcia Vasilévski dos Santos Araújo, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Brasil  
 Prof. Dr. Wilson Noé Garcés Aguilar, *Corporación Universitaria Autónoma del Cauca, Colômbia*  
 Prof. Dr. Xosé Somoza Medina, *Universidad de León, Espanha*

### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E24 Educação e ensino de ciências exatas e naturais II [livro eletrônico] /  
Organizador José Luis Escamilla Reyes. – Curitiba, PR: Artemis,  
2024.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

Edição bilingue

ISBN 978-65-81701-29-1

DOI 10.37572/EdArt\_311024291

1. Educação. 2. Ciências exatas e naturais – Estudo e ensino.  
3. Professores – Formação. I. Reyes, José Luis Escamilla.

CDD 371.72

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422



## PRÓLOGO

En este volumen, se presentan los resultados de varios y diversos proyectos de investigación en innovación educativa relacionados con la enseñanza de las ciencias y la ingeniería, tanto en niveles universitarios como básicos. Es así como, a través de distintas experiencias, se aborda la enseñanza de la Física, la Química Analítica y la enseñanza de temas matemáticos tales como la Aritmética y el Álgebra. También, se explora la incorporación de nuevas alternativas como la Inteligencia Artificial y sus aplicaciones en la enseñanza de las ciencias, particularmente de la Química.

Adicionalmente, en este libro se discuten los procesos de evaluación, no sólo de las actividades realizadas por los alumnos en los diferentes niveles educativos, sino de la pertinencia y adecuación del currículum en las disciplinas científicas, dentro de las que se puede mencionar a la Química Analítica y las Ciencias Exactas en general.

Por supuesto, hago la invitación a nuestros lectores para que disfruten la lectura de estos artículos de innovación educativa y, si son docentes en activo, que implementen alguna o varias de las estrategias y metodologías expuestas en este volumen con el fin de enriquecer su práctica docente y, de esta manera, contribuir en la mejora de los procesos educativos desde los niveles básicos hasta los universitarios.

Finalmente, los autores de este libro agradeceremos la retroalimentación y los comentarios propositivos que nos hagan llegar, puesto que lo más importante es asegurar que nuestros alumnos tengan una educación de calidad y que logren un aprendizaje significativo que les permita superar con éxito los problemas tanto en su formación académica como en su vida cotidiana.

Dr. José Luis Escamilla Reyes



## SUMÁRIO

### NUEVAS PERSPECTIVAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS E INGENIERÍA

#### **CAPÍTULO 1.....1**

LINEAR MOTION AND STATIC FRICTION COEFFICIENT USING HOTWHEELS TOYS

Uriel Rivera-Ortega

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_3110242911](https://doi.org/10.37572/EdArt_3110242911)

#### **CAPÍTULO 2.....11**

INVESTIGACIÓN FORMATIVA EN QUÍMICA ANALÍTICA

Norma Ruth López Santiago

María Teresa de Jesús Rodríguez Salazar

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_3110242912](https://doi.org/10.37572/EdArt_3110242912)

#### **CAPÍTULO 3.....23**

INTEGRACIÓN DE LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL EN LA ENSEÑANZA DE QUÍMICA:  
EXPERIENCIAS Y DESAFÍOS

Luis Bello

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_3110242913](https://doi.org/10.37572/EdArt_3110242913)

#### **CAPÍTULO 4.....33**

UNA MANERA DE AFIANZAR LA COMPETENCIA COMUNICATIVA EN ESTUDIANTES  
DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA

Marta Graciela Caligaris

Georgina Beatriz Rodríguez

Lucas Matías Maggiolini

Milton Tadeo Martin

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_3110242914](https://doi.org/10.37572/EdArt_3110242914)

#### **CAPÍTULO 5.....41**

LA INTERPOLACIÓN LAGRANGIANA, LAS SERIES DE FOURIER Y EL MODELADO  
MATEMÁTICO DEL PERFIL DE FIGURAS COTIDIANAS

José Luis Escamilla Reyes

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_3110242915](https://doi.org/10.37572/EdArt_3110242915)

**CAPÍTULO 6..... 51**

ANALYZING THE USE OF THE KIRKPATRICK MODEL IN HIGHER EDUCATION:  
INSIGHTS FROM AN NSF-FUNDED CHEMISTRY CURRICULUM PROJECT

James Lipuma

Cristo Leon

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_3110242916](https://doi.org/10.37572/EdArt_3110242916)

**ENFOQUES NOVEDOSOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EN LOS  
NIVELES BÁSICOS**

**CAPÍTULO 7..... 68**

EL TALLER DE CIENCIAS Y EL USO DEL MÉTODO CIENTÍFICO PARA PROMOVER  
EL PENSAMIENTO CIENTÍFICO EN PREESCOLARES

Karina Lisbet Ronzón Rodríguez

Ana Graciela Cortés Miguel

Kena Vásquez Suárez

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_3110242917](https://doi.org/10.37572/EdArt_3110242917)

**CAPÍTULO 8..... 81**

POTENCIALIDADE DA PARTICIPAÇÃO DOS ALUNOS DO 1.º CICLO DO ENSINO  
BÁSICO NAS ATIVIDADES PRÁTICAS DE CIÊNCIAS

Daniel Rui de Brito Geraldo

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_3110242918](https://doi.org/10.37572/EdArt_3110242918)

**CAPÍTULO 9..... 89**

DEVELOPING LEARNERS' ALGEBRAIC MANIPULATION ABILITY: A MATHEMATICS  
TEACHER/EDUCATOR REFLECTS ON PRE-SERVICE TEACHERS' INITIAL THOUGHTS

Barbara Kinach

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_3110242919](https://doi.org/10.37572/EdArt_3110242919)

**CAPÍTULO 10..... 107**

ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES EN PRIMER CICLO BÁSICO. UNA EXPERIENCIA  
DE INTERVENCIÓN CON DOCENTES

Ana Luisa Alvarado Pinto

Carmen Cecilia Espinoza Melo

Erich Leighton Vallejos

 [https://doi.org/10.37572/EdArt\\_31102429110](https://doi.org/10.37572/EdArt_31102429110)



<b>SOBRE O ORGANIZADOR.....</b>	<b>120</b>
<b>ÍNDICE REMISSIVO .....</b>	<b>121</b>

# CAPÍTULO 5

## LA INTERPOLACIÓN LAGRANGIANA, LAS SERIES DE FOURIER Y EL MODELADO MATEMÁTICO DEL PERFIL DE FIGURAS COTIDIANAS

Data de aceite: 28/10/2024

**Dr. José Luis Escamilla Reyes**

Departamento de Ciencias  
Escuela de Ingeniería y Ciencias  
Tecnológico de Monterrey  
Campus Ciudad de México  
Prol. Canal de Miramontes, Coapa  
San Bartolo el Chico, Tlalpan, 14380  
Ciudad de México, México  
<https://orcid.org/0000-0001-5069-0757>

**RESUMEN:** Las series de Fourier son una de las herramientas matemáticas que han sido ampliamente empleadas para aproximar funciones periódicas diversas. Sin embargo, en los cursos de ingeniería se aplican principalmente para modelar funciones periódicas más o menos simples, tales como funciones diente de sierra, onda cuadrada, senoidales rectificadas y así por el estilo. Entonces, ¿qué ocurre si estas series se emplean para desarrollar funciones más sofisticadas, por ejemplo, el perfil de un violín, de un florero o de alguna botella decorativa? En el presente artículo, se discute el desarrollo en serie de Fourier de tales perfiles aplicando el método de interpolación de Lagrange para obtener la función que

modela dichos perfiles, así como el proceso de implementación de este enfoque en un curso de ingeniería. Los resultados muestran tanto un mayor involucramiento de los estudiantes en esta actividad, como una valoración más positiva del método cuando se aplica para reproducir estos perfiles más sofisticados en comparación con las funciones usualmente aproximadas en los cursos de ingeniería.

**PALABRAS CLAVE:** Series de Fourier. Interpolación Lagrangiana de funciones. Funciones definidas a trozos.

### LAGRANGIAN INTERPOLATION, FOURIER SERIES, AND THE MATHEMATICAL MODELING OF EVERYDAY FIGURE PROFILES

**ABSTRACT:** Fourier series are one of the mathematical tools that have been widely used to approximate various periodic functions. However, in engineering courses they are mainly applied to model simple periodic functions, such as sawtooth functions, square waves, rectified sinusoidal waves, and so on. Therefore, what happens if these series are used to expand more sophisticated functions, for example, the profile of a violin, a vase, or a decorative bottle? In this article, the Fourier series expansion of such profiles by applying the Lagrange interpolation method to obtain the function that models such profiles is discussed, as well as the process of implementing this approach in an engineering

course. The results show both a greater involvement of students in this activity, and a more positive evaluation of the method when applied to reproduce these more sophisticated profiles compared to the functions usually approximated in engineering courses.

**KEYWORDS:** Fourier Series. Lagrange Interpolation. Piece-wise Functions.

## 1 INTRODUCCIÓN

La interpolación de funciones es un tema de fundamental importancia, sobre todo en el caso de funciones definidas por secciones. Diferentes esquemas han sido planteados para llevar a cabo esta tarea [1], siendo el de interpolación lagrangiana uno de los más importantes y que ha sido aplicado con éxito en la modelación de perfiles sofisticados en la ingeniería [2].

Por otro lado, los desarrollos en serie son una de las herramientas matemáticas más poderosas en la ingeniería, ya sean las series de potencias (MacLaurin o Taylor) o de funciones armónicas (Fourier o Hankel). Como se ha documentado ampliamente [3], sus aplicaciones van desde los cálculos aproximados, la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales y la aproximación de funciones. En el caso particular de las series de Fourier, el desarrollo de funciones periódicas es una de sus aplicaciones más importantes. Como ejemplos de este tipo de funciones, podemos mencionar a las funciones tipo dientes de sierra, onda cuadrada, senoidales rectificadas y funciones relacionadas. Cabe señalar que, en todos estos casos, la función a desarrollar es conocida como parte del problema a resolver, o se puede obtener de una forma simple.

Sin embargo, a pesar de la importancia que tienen estas funciones en la ingeniería aplicada, los estudiantes de ingeniería tienen la impresión de que sólo este tipo de funciones relativamente simples pueden ser aproximadas por medio de las series de Fourier [4].

Por tanto, el objetivo del presente trabajo es el mostrar que este formalismo puede aplicarse para aproximar funciones más sofisticadas, por ejemplo, aquellas que provienen de objetos cotidianos, tales como la silueta de algunos instrumentos musicales como los violines, el perfil de un rostro humano u objetos relacionados. De esta manera, se pretende que el aprendizaje de esta técnica matemática sea más significativo puesto que, en general, la función que describe dichos perfiles no es una función simple y debe expresarse como una función definida por segmentos, lo cual implica un esfuerzo intelectual por parte de los estudiantes y una apreciación acerca del proceso de modelación por aproximaciones sucesivas, así que las ganancias de aprendizaje serán mayores comparadas con el tipo de problemas que usualmente se resuelven al presentar el tema en los cursos de ingeniería asociados.

## 2 MARCO TEÓRICO

### 2.1 INTERPOLACIÓN LAGRANGIANA

Sea una  $f(x)$  función desconocida. Suponga que se conocen  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  definiendo  $n + 1$  valores discretos de esta función tales que

$$f(x_0) = f_0, f(x_1) = f_1, f(x_2) = f_2, \dots, f(x_n) = f_n \dots (1.1)$$

Entonces, existe un polinomio  $g(x)$  de grado que pasa por el conjunto de  $n + 1$  puntos y que puede expresarse como

$$g(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n \dots (1.2)$$

Donde los coeficientes  $a_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$  son las incógnitas del desarrollo. Estos coeficientes pueden obtenerse de diversas formas, por ejemplo, ajustando la serie de potencias o por medio de la interpolación lagrangiana. Si se opta por el primer método, la función  $g(x)$  debe ser tal que

$$g(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \dots + a_n x_i^n = f_i, \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Este enfoque implica que, para obtener los coeficientes  $a_i$ , se debe resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \rightarrow A\vec{a} = \vec{f} \dots (1.3)$$

Dado que, por ejemplo, debemos invertir la matriz  $A$  para obtener las componentes del vector  $\vec{f}$ , este es un problema con una complejidad considerable, por lo que, en cambio, se prefiere el procedimiento de la interpolación Lagrangiana para obtener la función  $g(x)$ .

En este método, se propone un desarrollo del tipo

$$g(x) = \sum_{i=0}^n f_i V_i(x) = f_0 V_0(x) + f_1 V_1(x) + f_2 V_2(x) + \dots + f_n V_n(x) \dots (1.4)$$

Donde  $V_i(x)$  es un polinomio de grado  $n$  asociado con cada nodo  $i$  tal que

$$V_i(x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Definido por medio de **[2]**

$$V_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \quad \dots (1.5)$$

Por ejemplo, en el caso de la interpolación cuadrática ( $n=2$ ) y tres nodos  $x_0, x_1$  y  $x_2$ , la función de interpolación Lagrangiana  $g(x)$  está dada por

$$g(x) = \sum_{i=0}^2 f_i V_i(x) = f_0 V_0(x) + f_1 V_1(x) + f_2 V_2(x)$$

Siendo

$$V_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, V_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, V_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Para ilustrar el método, supongamos conocidos los siguientes puntos de una función desconocida, que se muestran en la Tabla (2.1)

Tabla (2.1): Puntos por los que pasa la función  $f(x)$ .

$x$	$f(x)$
3	1
4	2
5	4

De acuerdo con esto, las funciones base de la interpolación están dadas por

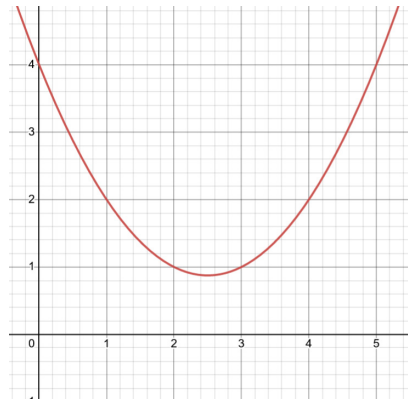
$$V_0(x) = \frac{(x - 4)(x - 5)}{(3 - 4)(3 - 5)}, V_1(x) = \frac{(x - 3)(x - 5)}{(4 - 3)(4 - 5)}, V_2(x) = \frac{(x - 3)(x - 4)}{(5 - 3)(5 - 4)}$$

Por lo que la función de interpolación  $g(x)$  es

$$g(x) = \frac{(x - 4)(x - 5)}{2} - 2(x - 3)(x - 5) + 2(x - 3)(x - 4)$$

Cuya gráfica se muestra en la Figura (2.1):

**Figura 2.1.** La función  $g(x)$  que pasa por los puntos dados en la Tabla (2.1).



Donde, de acuerdo con la definición de  $g(x)$ , se obtiene

$$g(3) = \frac{(3-4)(3-5)}{2} = 1$$

$$g(4) = -2(4-3)(4-5) = 2$$

$$g(5) = 2(5-3)(5-4) = 4$$

Lo cual coincide con los puntos conocidos de la función incógnita.

## 2.2 LAS SERIES DE FOURIER

Descripción del método, características principales, ejemplos de aplicación

Suponga que  $f(t)$  es una función definida en un intervalo  $[-T, T]$ . Así, el desarrollo Fourier de  $f(t)$  está dado por **[3]**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{n\pi}{T} t \right) \dots (2.1)$$

Donde los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  se definen como

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) dt \dots (2.2)$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos \frac{n\pi}{T} t dt \quad \dots (2.3)$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin \frac{n\pi}{T} t dt \quad \dots (2.4)$$

Por ejemplo, de acuerdo con las definiciones anteriores, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0 \\ \pi - t, & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

Vienen dados por

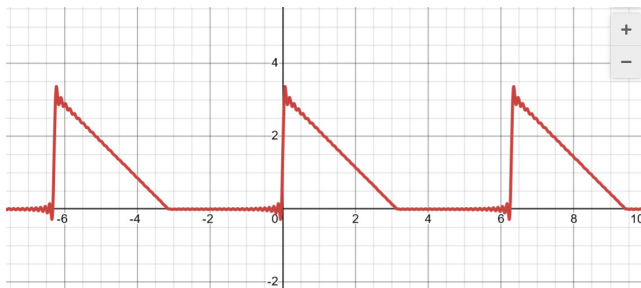
$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Así, las series de Fourier de la función anterior pueden expresarse como

$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi} \cos nt + \frac{1}{n} \sin nt \right]$$

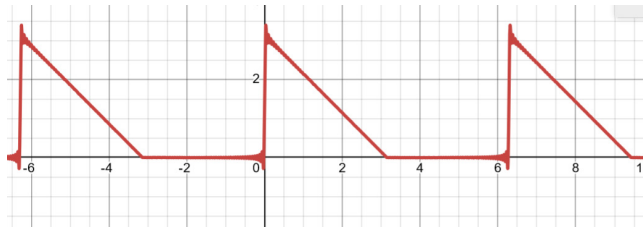
Este desarrollo en serie de Fourier se muestra en la figura X.X. Es evidente que, al incrementar el número de términos de la sumatoria, mejora la concordancia entre la función original y el desarrollo de Fourier salvo en ciertos puntos debido al conocido Fenómeno de Gibbs [3].

**Figura (2.2):** El desarrollo en Serie de Fourier de la función  $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0 \\ \pi - t, & 0 \leq t < \pi \end{cases}$  con  $n=50$  términos.





**Figura (2.3):** El desarrollo en Serie de Fourier de la función  $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0 \\ \pi - t, & 0 \leq t < \pi \end{cases}$  con  $n=100$  términos.



Aplicando este formalismo, se pueden obtener los desarrollos en Serie de Fourier para varias funciones de interés en la ingeniería, tales como las funciones diente de sierra, onda cuadrada o senoidales rectificadas. Estos desarrollos pueden encontrarse en las referencias usuales del tema en cuestión [3, 4].

### 3 DESARROLLO

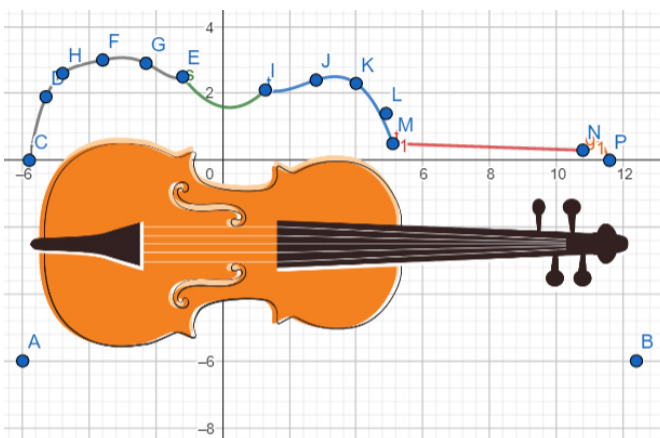
#### 3.1 LOS PERFILES DE OBJETOS SOFISTICADOS DE LA VIDA COTIDIANA Y LA INTERPOLACIÓN LAGRANGIANA: EL VIOLÍN

Como un ejemplo de aplicación de estas técnicas, se modelará el perfil del cuerpo de un violín empleando el siguiente conjunto de puntos:

$$S = \{A(0, 0), B(b, y_1), C(c, y_2), D(d, y_3), E(e, y_4), F(f, y_5), G(g, y_6), H(h, y_7), I(i, y_8), J(j, y_9), K(k, y_{10})\}$$

Que se muestran en la Figura (3.1)

**Figura (3.1):** El perfil del cuerpo del violín mostrando los puntos relevantes del conjunto S.



Entonces, definiremos el perfil superior del violín de acuerdo con las siguientes funciones seccionadas obtenidas con interpolación Lagrangiana:

Intervalo I:  $-5.8 \leq x \leq -1.2$

$$f_I(x) = 0.0329x^5 + 0.5316x^4 + 3.3038x^3 + 9.6356x^2 + 12.6769x + 8.5256 \dots (3.1)$$

Intervalo II:  $-1.2 \leq x \leq 2$

$$f_{II}(x) = 0.4018x^2 - 0.2679x + 1.6 \dots (3.2)$$

Intervalo III:  $2 \leq x \leq 5.1$

$$h(x) = -0.1632x^3 + 1.2664x^2 - 2.9776x + 4.3905 \dots (3.3)$$

Intervalo IV:  $5.1 \leq x \leq 10.8$

$$i(x) = -0.0402x + 0.6790 \dots (3.4)$$

Intervalo V:  $10.8 \leq x \leq 11.6$

$$j(x) = -2.8126x^2 + 62.6251x - 348.1 \dots (3.5)$$

En la Figura (3.1), se muestran las distintas funciones logradas en cada uno de los intervalos del I al V, de acuerdo con los polinomios (3.1-3.5). Dada la simplicidad de los cálculos involucrados, es notable el ajuste logrado con las funciones seccionadas que se obtuvieron con la interpolación de Lagrange.

### 3.2 APLICACIONES DE LAS SERIES DE FOURIER Y FUNCIONES SECCIONADAS

Utilizando las funciones seccionadas obtenidas en la sección anterior, se puede obtener el desarrollo en Serie de Fourier de estos objetos.

En este caso, para resolver las integrales necesarias para obtener los coeficientes de Fourier, se utilizaron los *softwares* Symbolab<sup>®</sup> y Mathematica (R) dada la complicada naturaleza de algunas de las integrales del desarrollo:

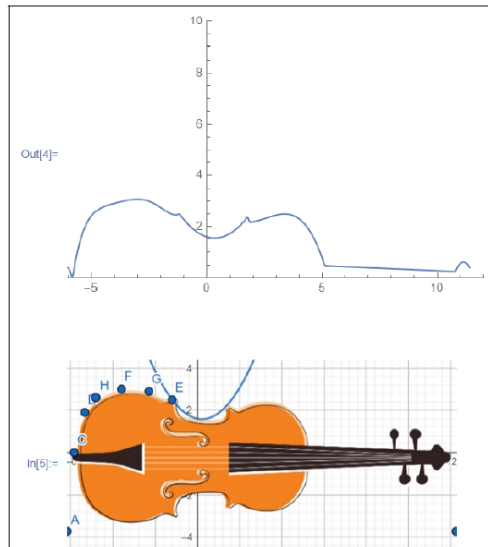
$$a_{0m} = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} f_m(t) dt \dots (3.6)$$

$$a_{nm} = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} f_m(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt \dots (3.7)$$

$$b_{nm} = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} f_m(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt \dots (3.8)$$

En donde el índice  $m$  denota la  $m$ -ésima función, obtenida mediante la interpolación Lagrangiana. Los resultados se muestran en la Figura (3.2)

**Figura (3.2):** Perfilado del cuerpo del violín por medio de Series de Fourier obtenidas por medio de las funciones seccionadas.



#### 4. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Como puede observarse a partir de los resultados obtenidos, la concordancia entre el perfil original y las funciones seccionadas es bastante adecuado, especialmente si consideramos la simplicidad del Método de Interpolación de Lagrange. Por supuesto, si se desea un ajuste más preciso, el perfil real del objeto debe seccionarse con mayor detalle, de tal forma que se obtenga un mayor número de funciones seccionadas y con ellas ajustar el perfil del objeto.

Es claro que, al incrementar el número y complejidad de las funciones seccionadas necesarias para ajustar el perfil del objeto real, las integrales que serán necesarias para obtener las Series de Fourier del perfil serán más incómodas de realizar desde el punto de vista manual, por lo que será imprescindible contar con el apoyo de Mathematica para obtenerlas y, a través de ellas, los coeficientes del desarrollo de Fourier.

Pese a estos engorrosos detalles técnicos del cálculo, el simple hecho de obtener perfiles más sofisticados que los que usualmente se plantean en los cursos ordinarios de Matemáticas constituyen una ganancia de aprendizaje muy valiosa con lo cual se logra un mayor involucramiento y sentido de reto y logro en los estudiantes al desarrollar esta actividad.

## 5 CONCLUSIONES

A través del proceso de interpolación de Lagrange se obtiene el perfil de una figura más sofisticada que las que usualmente se presentan en los cursos de Matemáticas; el método señalado es muy simple de implementar como se mostró en el presente trabajo y tiene la ventaja de ser una aproximación más intuitiva al problema de la interpolación de funciones, especialmente las seccionadas.

Por otro lado, se discute el desarrollo en serie de Fourier de funciones definidas por secciones (*piece-wise functions*) para mostrar una aplicación más concreta, menos abstracta de estos desarrollos en serie y hacer más patente la gran utilidad que tienen en una gran diversidad de situaciones. Los resultados obtenidos al implementar esta actividad en los cursos de Matemáticas Avanzadas muestran tanto un mayor involucramiento de los estudiantes en esta actividad, como una valoración más positiva del método cuando se aplica para reproducir estos perfiles más sofisticados en comparación con las funciones usualmente aproximadas en los cursos de ingeniería, las cuales son periódicas y, en comparación con las obtenidas en este trabajo, más simples desde el punto de vista matemático.

## REFERENCIAS

- [1] Beltrán A. C., Métodos Numéricos: Interpolación de Funciones (Open CourseWare), Universidad de Cantabria.
- [2] Mora F. W., Introducción a los Métodos Numéricos, Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- [3] Zill, D. G. (2020). *Advanced Engineering Mathematics*. (9<sup>th</sup> Edition). Cengage Learning.
- [4] Zill, D.G. and Cullen, M.R. (1997), *Differential Equations With Boundary-Value Problems*, (4<sup>th</sup> Edition), Brooks Cole.

## SOBRE O ORGANIZADOR

**Dr. José Luis Escamilla Reyes-** Profesor del Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México desde 1998. Doctor en Física por la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Cuenta con una experiencia docente de 32 años. Es coautor de Manuales de Física II y Física III, así como de dos ebooks, uno sobre Física General y otro sobre Óptica y Física Moderna. Está certificado en el Programa de Desarrollo de Habilidades Docentes del Tecnológico de Monterrey. Ha participado con varios trabajos en Congresos Nacionales e Internacionales relacionados con la Física de Semiconductores de los grupos IV y III-V. Sus áreas de interés son: fuentes alternativas de energía, Física del Estado Sólido, diseño y aplicaciones de los MEMS y modelación matemática de Sistemas Complejos. Ha publicado más de 15 trabajos arbitrados y memorias en congresos. Colaboró en el diseño y construcción de láseres pulsados de N<sub>2</sub> en el Laboratorio de Óptica Cuántica de la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa (UAMI). En el Tecnológico de Monterrey Campus Ciudad de México, participó en el desarrollo de un prototipo de Celda de Combustible con membrana de intercambio protónico (PEMFC) de alta eficiencia. Obtuvo la Medalla al Mérito Académico por el mejor promedio de Maestría otorgada por la UAMI. Fue líder de la Cátedra de Investigación “Micro Sistemas Electromecánicos: Diseño y aplicaciones” del Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México y miembro del SNI.

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

ADDIE Approach 51

Atividades práticas 81, 82, 86, 87

### C

Circular economy 51, 52, 53, 59, 60, 66

Coefficient of static friction 1, 6, 9

Competencias 14, 32, 33, 34, 35, 40, 79, 80, 81

Comunicación oral 33

Cultura científica 81, 82

### D

Doctoral pedagogy 51

### E

Educação em ciências 81, 83

Educación 11, 12, 13, 20, 23, 24, 25, 31, 32, 33, 40, 52, 70, 79, 80, 107, 108, 110, 112, 118

Educación superior 11, 12, 52

Enseñanza 11, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 31, 32, 36, 37, 69, 80, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 115, 116, 117, 118, 119

Enseñanza de las fracciones 107, 110, 118

Enseñanza de química 23

Environmental challenges 51

Experiment 1, 3, 4, 5, 6, 7, 105

### F

Formación del profesorado 107, 108

Fracciones 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119

Funciones definidas a trozos 41

### I

Interdisciplinary chemistry education 51

Interpolación Lagrangiana de funciones 41

Investigación formativa 11, 12, 13, 14, 15, 17, 20, 21, 22

## K

Kirkpatrick Model 51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 64, 65, 66, 67

## L

Linear motion 1, 2, 3, 4, 9, 10

## M

Método científico 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80

Metodología de enseñanza 36, 107

## P

Participação 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87

PCK for Simplifying Algebraic Expressions 89, 96

Pensamiento científico 68, 70, 71, 72, 73, 74, 78, 79, 80

Personalización del aprendizaje 23, 27, 28, 31

## Q

Química analítica 11, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21

## R

Registros semióticos 33, 35, 38, 39, 40

## S

Series de Fourier 41, 42, 45, 46, 48, 49

Socio-economic governance 51

STEM resource 1

Sustainability education 51

Sustainable Development Goal 4 Quality Education (SDG 4) 51

## T

Taller 68, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 79, 80

Tecnologías educativasal 23

Transdisciplinary communication 51

1.º Ciclo do Ensino Básico 81, 87