José Luis Escamilla Reyes
(organizador)

EDUCAÇÃO E ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

VOL II

EDITORA ARTEMIS
2024

José Luis Escamilla Reyes
(organizador)

EDUCAÇÃO E ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

VOL II

EDITORA ARTEMIS
2024

Editora Chefe Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora Executiva M.ª Viviane Carvalho Mocellin
Direção de Arte M.ª Bruna Bejarano
Diagramação Elisangela Abreu
Organizador Prof. Dr. José Luis Escamilla Reyes
Imagem da Capa ekaart/123RF
Bibliotecário Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Editora Artemis
Curitiba-PR Brasil
www.editoraartemis.com.br
e-mail:publicar@editoraartemis.com.br

Editora Artemis
Curitiba-PR Brasil
www.editoraartemis.com.br
e-mail:publicar@editoraartemis.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E24 Educação e ensino de ciências exatas e naturais II [livro eletrônico] / Organizador José Luis Escamilla Reyes. – Curitiba, PR: Artemis, 2024.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
Edição bilíngue
ISBN 978-65-81701-29-1
DOI 10.37572/EdArt_311024291

1. Educação. 2. Ciências exatas e naturais – Estudo e ensino. 3. Professores – Formação. I. Reyes, José Luis Escamilla.

CDD 371.72

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

EDITORA ARTEMIS
2024

Editora Artemis
Curitiba-PR Brasil
www.editoraartemis.com.br
e-mail:publicar@editoraartemis.com.br

PRÓLOGO

En este volumen, se presentan los resultados de varios y diversos proyectos de investigación en innovación educativa relacionados con la enseñanza de las ciencias y la ingeniería, tanto en niveles universitarios como básicos. Es así como, a través de distintas experiencias, se aborda la enseñanza de la Física, la Química Analítica y la enseñanza de temas matemáticos tales como la Aritmética y el Álgebra. También, se explora la incorporación de nuevas alternativas como la Inteligencia Artificial y sus aplicaciones en la enseñanza de las ciencias, particularmente de la Química.

Adicionalmente, en este libro se discuten los procesos de evaluación, no sólo de las actividades realizadas por los alumnos en los diferentes niveles educativos, sino de la pertinencia y adecuación del currículum en las disciplinas científicas, dentro de las que se puede mencionar a la Química Analítica y las Ciencias Exactas en general.

Por supuesto, hago la invitación a nuestros lectores para que disfruten la lectura de estos artículos de innovación educativa y, si son docentes en activo, que implementen alguna o varias de las estrategias y metodologías expuestas en este volumen con el fin de enriquecer su práctica docente y, de esta manera, contribuir en la mejora de los procesos educativos desde los niveles básicos hasta los universitarios.

Finalmente, los autores de este libro agradeceremos la retroalimentación y los comentarios propositivos que nos hagan llegar, puesto que lo más importante es asegurar que nuestros alumnos tengan una educación de calidad y que logren un aprendizaje significativo que les permita superar con éxito los problemas tanto en su formación académica como en su vida cotidiana.

Dr. José Luis Escamilla Reyes

SUMÁRIO

NUEVAS PERSPECTIVAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS E INGENIERÍA

CAPÍTULO 5

LA INTERPOLACIÓN LAGRANGIANA, LAS SERIES DE FOURIER Y EL MODELADO MATEMÁTICO DEL PERFIL DE FIGURAS COTIDIANAS

Data de aceite: 28/10/2024

Dr. José Luis Escamilla Reyes
Departamento de Ciencias
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Tecnológico de Monterrey
Campus Ciudad de México
Prol. Canal de Miramontes, Coapa
San Bartolo el Chico, Tlalpan, 14380
Ciudad de México, México
https://orcid.org/0000-0001-5069-0757

RESUMEN: Las series de Fourier son una de las herramientas matemáticas que han sido ampliamente empleadas para aproximar funciones periódicas diversas. Sin embargo, en los cursos de ingeniería se aplican principalmente para modelar funciones periódicas más o menos simples, tales como funciones diente de sierra, onda cuadrada, senoidales rectificadas y así por el estilo. Entonces, ¿qué ocurre si estas series se emplean para desarrollar funciones más sofisticadas, por ejemplo, el perfil de un violín, de un florero o de alguna botella decorativa? En el presente artículo, se discute el desarrollo en serie de Fourier de tales perfiles aplicando el método de interpolación de Lagrange para obtener la función que modela dichos perfiles, así como el proceso de implementación de este enfoque en un curso de ingeniería. Los resultados muestran tanto un mayor involucramiento de los estudiantes en esta actividad, como una valoración más positiva del método cuando se aplica para reproducir estos perfiles más sofisticados en comparación con las funciones usualmente aproximadas en los cursos de ingeniería.
PALABRAS CLAVE: Series de Fourier. Interpolación Lagrangiana de funciones. Funciones definidas a trozos.

LAGRANGIAN INTERPOLATION, FOURIER SERIES, AND THE MATHEMATICAL MODELING OF EVERYDAY FIGURE PROFILES

ABSTRACT: Fourier series are one of the mathematical tools that have been widely used to approximate various periodic functions. However, in engineering courses they are mainly applied to model simple periodic functions, such as sawtooth functions, square waves, rectified sinusoidal waves, and so on. Therefore, what happens if these series are used to expand more sophisticated functions, for example, the profile of a violin, a vase, or a decorative bottle? In this article, the Fourier series expansion of such profiles by applying the Lagrange interpolation method to obtain the function that models such profiles is discussed, as well as the process of implementing this approach in an engineering

course. The results show both a greater involvement of students in this activity, and a more positive evaluation of the method when applied to reproduce these more sophisticated profiles compared to the functions usually approximated in engineering courses.
KEYWORDS: Fourier Series. Lagrange Interpolation. Piece-wise Functions.

1 INTRODUCCIÓN

La interpolación de funciones es un tema de fundamental importancia, sobre todo en el caso de funciones definidas por secciones. Diferentes esquemas han sido planteados para llevar a cabo esta tarea **[1]**, siendo el de interpolación lagrangiana uno de los más importantes y que ha sido aplicado con éxito en la modelación de perfiles sofisticados en la ingeniería **[2]**.

Por otro lado, los desarrollos en serie son una de las herramientas matemáticas más poderosas en la ingeniería, ya sean las series de potencias (MacLaurin o Taylor) o de funciones armónicas (Fourier o Hankel). Como se ha documentado ampliamente **[3]**, sus aplicaciones van desde los cálculos aproximados, la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales y la aproximación de funciones. En el caso particular de las series de Fourier, el desarrollo de funciones periódicas es una de sus aplicaciones más importantes. Como ejemplos de este tipo de funciones, podemos mencionar a las funciones tipo dientes de sierra, onda cuadrada, senoidales rectificadas y funciones relacionadas. Cabe señalar que, en todos estos casos, la función a desarrollar es conocida como parte del problema a resolver, o se puede obtener de una forma simple.

Sin embargo, a pesar de la importancia que tienen estas funciones en la ingeniería aplicada, los estudiantes de ingeniería tienen la impresión de que sólo este tipo de funciones relativamente simples pueden ser aproximadas por medio de las series de Fourier **[4]**.

Por tanto, el objetivo del presente trabajo es el mostrar que este formalismo puede aplicarse para aproximar funciones más sofisticadas, por ejemplo, aquellas que provienen de objetos cotidianos, tales como la silueta de algunos instrumentos musicales como los violines, el perfil de un rostro humano u objetos relacionados. De esta manera, se pretende que el aprendizaje de esta técnica matemática sea más significativo puesto que, en general, la función que describe dichos perfiles no es una función simple y debe expresarse como una función definida por segmentos, lo cual implica un esfuerzo intelectual por parte de los estudiantes y una apreciación acerca del proceso de modelación por aproximaciones sucesivas, así que las ganancias de aprendizaje serán mayores comparadas con el tipo de problemas que usualmente se resuelven al presentar el tema en los cursos de ingeniería asociados.

2 MARCO TEÓRICO

2.1 INTERPOLACIÓN LAGRANGIANA

Sea una $f(x)$ función desconocida. Suponga que se conocen $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ definiendo $n+1$ valores discretos de esta función tales que

$$f(x_0) = f_0, f(x_1) = f_1, f(x_2) = f_2, \cdots, f(x_n) = f_n \quad \ldots\ (1.1)$$

Entonces, existe un polinomio $g(x)$ de grado que pasa por el conjunto de $n+1$ puntos y que puede expresarse como

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n \quad \ldots\ (1.2)$$

Donde los coeficientes $a_i, i = 0,1,2,\cdots, n$ son las incógnitas del desarrollo. Estos coeficientes pueden obtenerse de diversas formas, por ejemplo, ajustando la serie de potencias o por medio de la interpolación lagrangiana. Si se opta por el primer método, la función $g(x)$ debe ser tal que

$$g(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \cdots + a_n x_i^n = f_i, \qquad \forall i = 0, 1,2, \cdots, n$$

Este enfoque implica que, para obtener los coeficientes a_i , se debe resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A\vec{a} = \vec{f} \quad \ldots (1.3)$$

Dado que, por ejemplo, debemos invertir la matriz A para obtener las componentes del vector $\vec{f}$, este es un problema con una complejidad considerable, por lo que, en cambio, se prefiere el procedimiento de la interpolación Lagrangiana para obtener la función $g(x)$.

En este método, se propone un desarrollo del tipo

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i V_i(x) = f_0 V_0(x) + f_1 V_1(x) + f_2 V_2(x) + \cdots + f_n V_n(x) \quad \ldots (1.4)$$

Donde $V_i(x)$ es un polinomio de grado n asociado con cada nodo i tal que

$$V_i(x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Definido por medio de **[2]**

$$V_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \quad \dots(1.5)$$

Por ejemplo, en el caso de la interpolación cuadrática (n=2) y tres nodos x_0, x_1 y x_2, la función de interpolación Lagrangiana $g\,(x)$ está dada por

$$g(x) = \sum_{i=0}^{2} f_i V_i(x) = f_0 V_0(x) + f_1 V_1(x) + f_2 V_2(x)$$

Siendo

$$V_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, V_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, V_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Para ilustrar el método, supongamos conocidos los siguientes puntos de una función desconocida, que se muestran en la Tabla (2.1)

Tabla (2.1): Puntos por los que pasa la función f(x).

x	*f*(*x*)
3	1
4	2
5	4

De acuerdo con esto, las funciones base de la interpolación están dadas por

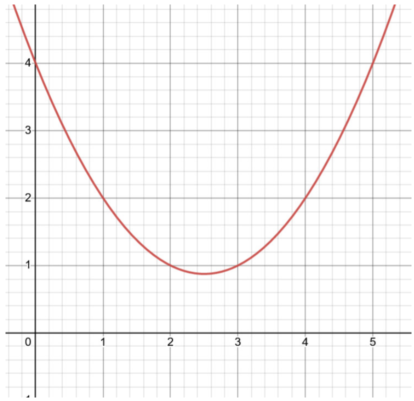
$$V_0(x) = \frac{(x-4)(x-5)}{(3-4)(3-5)}, V_1(x) = \frac{(x-3)(x-5)}{(4-3)(4-5)}, V_2(x) = \frac{(x-3)(x-4)}{(5-3)(5-4)}$$

Por lo que la función de interpolación $g\,(x)$ es

$$g(x) = \frac{(x-4)(x-5)}{2} - 2(x-3)(x-5) + 2(x-3)(x-4)$$

Cuya gráfica se muestra en la Figura (2.1):

Figura 2.1. La función g(x) que pasa por los puntos dados en la Tabla (2.1).



Donde, de acuerdo con la definición de $g\,(x)$, se obtiene

$$g(3) = \frac{(3-4)(3-5)}{2} = 1$$

$$g(4) = -2(4-3)(4-5) = 2$$

$$g(5) = 2(5-3)(5-4) = 4$$

Lo cual coincide con los puntos conocidos de la función incógnita.

2.2 LAS SERIES DE FOURIER

Descripción del método, características principales, ejemplos de aplicación

Suponga que $f\,(t)$ es una función definida en un intervalo $[-T, T]$. Así, el desarrollo Fourier de $f\,(t)$ está dado por **[3]**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{T}t + b_n \sin\frac{n\pi}{T}t\right) \quad \dots (2.1)$$

Donde los coeficientes a_0, a_n y b_n se definen como

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)dt \quad \dots (2.2)$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\frac{n\pi}{T}t\,dt \quad \dots (2.3)$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\sin\frac{n\pi}{T}t\,dt \quad \dots (2.4)$$

Por ejemplo, de acuerdo con las definiciones anteriores, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} 0\ , & -\pi < t < 0 \\ \pi - t & ,0 \le t < \pi \end{cases}$$

Vienen dados por

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}, \qquad b_n = \frac{1}{n}$$

Así, las series de Fourier de la función anterior pueden expresarse como

$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nt + \frac{1}{n}\sin nt\right]$$

Este desarrollo en serie de Fourier se muestra en la figura X.X. Es evidente que, al incrementar el número de términos de la sumatoria, mejora la concordancia entre la función original y el desarrollo de Fourier salvo en ciertos puntos debido al conocido Fenómeno de Gibbs [3].

Figura (2.2): El desarrollo en Serie de Fourier de la función $f(t) = \begin{cases} 0\ , & -\pi < t < 0 \\ \pi - t\ , & 0 \le t < \pi \end{cases}$ con n=50 términos.

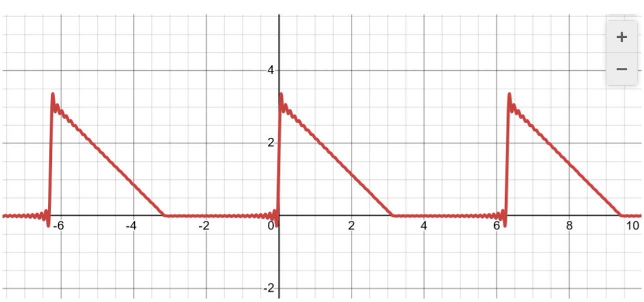
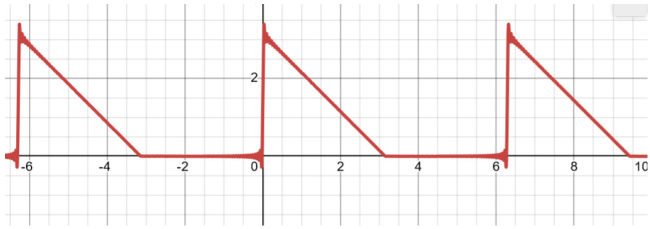


Figura (2.3): El desarrollo en Serie de Fourier de la función $f(t) = \begin{cases} 0\,, & -\pi < t < 0 \\ \pi - t\,, & 0 \le t < \pi \end{cases}$ con n=100 términos.



Aplicando este formalismo, se pueden obtener los desarrollos en Serie de Fourier para varias funciones de interés en la ingeniería, tales como las funciones diente de sierra, onda cuadrada o senoidales rectificadas. Estos desarrollos pueden encontrarse en las referencias usuales del tema en cuestión **[3, 4]**.

3 DESARROLLO

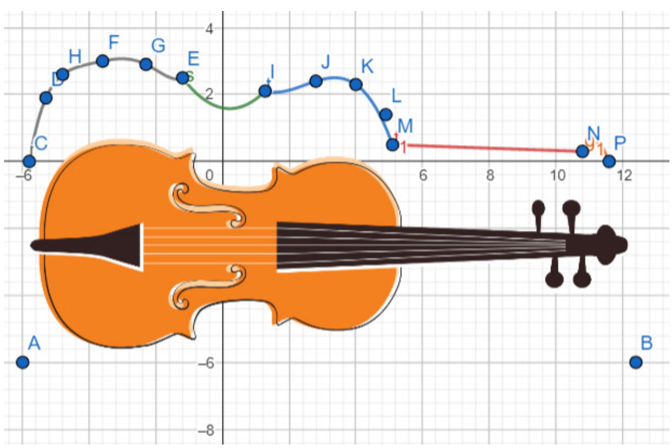
3.1 LOS PERFILES DE OBJETOS SOFISTICADOS DE LA VIDA COTIDIANA Y LA INTERPOLACIÓN LAGRANGIANA: EL VIOLÍN

Como un ejemplo de aplicación de estas técnicas, se modelará el perfil del cuerpo de un violín empleando el siguiente conjunto de puntos:

S={$A(0, 0)$, B(b, y1), C(c, y2), D(d, y3), E(e, y4), F(f, y5), G(g, y6), H(h, y7), I(i, y8), J(j, y9), K(k, y10)}

Que se muestran en la Figura (3.1)

Figura (3.1): El perfil del cuerpo del violín mostrando los puntos relevantes del conjunto S.



Entonces, definiremos el perfil superior del violín de acuerdo con las siguientes funciones seccionadas obtenidas con interpolación Lagrangiana:

Intervalo I: $-5.8 \leq x \leq -1.2$

$$f_I(x) = 0.0329x^5 + 0.5316x^4 + 3.3038x^3 + 9.6356x^2 + 12.6769x + 8.5256 \;\ldots (3.1)$$

Intervalo II: $-1.2 \leq x \leq 2$

$$f_{II}(x) = 0.4018x^2 - 0.2679x + 1.6 \quad \ldots (3.2)$$

Intervalo III: $2 \leq x \leq 5.1$

$$h(x) = -0.1632x^3 + 1.2664x^2 - 2.9776x + 4.3905 \quad \ldots (3.3)$$

Intervalo IV: $5.1 \leq x \leq 10.8$

$$i(x) = -0.0402x + 0.6790 \quad \ldots (3.4)$$

Intervalo V: $10.8 \leq x \leq 11.6$

$$j(x) = -2.8126x^2 + 62.6251x - 348.1 \quad \ldots (3.5)$$

En la Figura (3.1), se muestran las distintas funciones logradas en cada uno de los intervalos del I al V, de acuerdo con los polinomios (3.1-3.5). Dada la simplicidad de los cálculos involucrados, es notable el ajuste logrado con las funciones seccionadas que se obtuvieron con la interpolación de Lagrange.

3.2 APLICACIONES DE LAS SERIES DE FOURIER Y FUNCIONES SECCIONADAS

Utilizando las funciones seccionadas obtenidas en la sección anterior, se puede obtener el desarrollo en Serie de Fourier de estos objetos.

En este caso, para resolver las integrales necesarias para obtener los coeficientes de Fourier, se utilizaron los *softwares* Symbolab ® y Mathematica (R) dada la complicada naturaleza de algunas de las integrales del desarrollo:

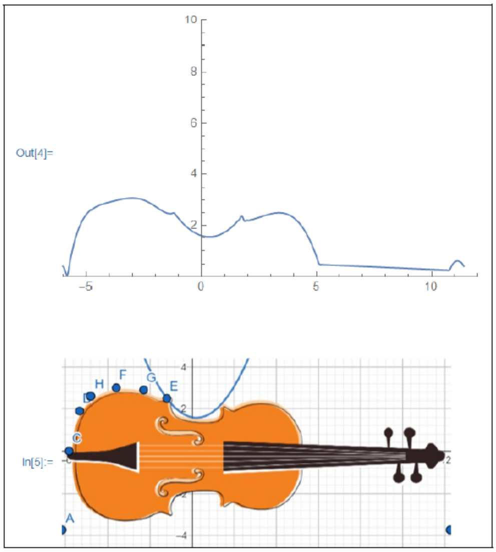
$$a_{0m} = \frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} f_m(t)dt \quad \ldots (3.6)$$

$$a_{nm} = \frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} f_m(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)dt \quad \ldots (3.7)$$

$$b_{nm} = \frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} f_m(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)dt \ldots (3.8)$$

En donde el índice m denota la $m\text{–}ésima$ función, obtenida mediante la interpolación Lagrangiana. Los resultados se muestran en la Figura (3.2)

Figura (3.2): Perfilado del cuerpo del violín por medio de Series de Fourier obtenidas por medio de las funciones seccionadas.



4. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Como puede observarse a partir de los resultados obtenidos, la concordancia entre el perfil original y las funciones seccionadas es bastante adecuado, especialmente si consideramos la simplicidad del Método de Interpolación de Lagrange. Por supuesto, si se desea un ajuste más preciso, el perfil real del objeto debe seccionarse con mayor detalle, de tal forma que se obtenga un mayor número de funciones seccionadas y con ellas ajustar el perfil del objeto.

Es claro que, al incrementar el número y complejidad de las funciones seccionadas necesarias para ajustar el perfil del objeto real, las integrales que serán necesarias para obtener las Series de Fourier del perfil serán más incómodas de realizar desde el punto de vista manual, por lo que será imprescindible contar con el apoyo de Mathematica para obtenerlas y, a través de ellas, los coeficientes del desarrollo de Fourier.

Pese a estos engorrosos detalles técnicos del cálculo, el simple hecho de obtener perfiles más sofisticados que los que usualmente se plantean en los cursos ordinarios de Matemáticas constituyen una ganancia de aprendizaje muy valiosa con lo cual se logra un mayor involucramiento y sentido de reto y logro en los estudiantes al desarrollar esta actividad.

5 CONCLUSIONES

A través del proceso de interpolación de Lagrange se obtiene el perfil de una figura más sofisticada que las que usualmente se presentan en los cursos de Matemáticas; el método señalado es muy simple de implementar como se mostró en el presente trabajo y tiene la ventaja de ser una aproximación más intuitiva al problema de la interpolación de funciones, especialmente las seccionadas.

Por otro lado, se discute el desarrollo en serie de Fourier de funciones definidas por secciones (*piece-wise functions*) para mostrar una aplicación más concreta, menos abstracta de estos desarrollos en serie y hacer más patente la gran utilidad que tienen en una gran diversidad de situaciones. Los resultados obtenidos al implementar esta actividad en los cursos de Matemáticas Avanzadas muestran tanto un mayor involucramiento de los estudiantes en esta actividad, como una valoración más positiva del método cuando se aplica para reproducir estos perfiles más sofisticados en comparación con las funciones usualmente aproximadas en los cursos de ingeniería, las cuales son periódicas y, en comparación con las obtenidas en este trabajo, más simples desde el punto de vista matemático.

REFERENCIAS

[1] Beltrán A. C., Métodos Numéricos: Interpolación de Funciones (Open CourseWare), Universidad de Cantabria.

[2] Mora F. W., Introducción a los Métodos Numéricos, Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

[3] Zill, D. G. (2020). Advanced Engineering Mathematics. (9th Edition). Cengage Learning.

[4] Zill, D.G. and Cullen, M.R. (1997), Differential Equations With Boundary-Value Problems, (4th Edition), Brooks Cole.

SOBRE O ORGANIZADOR

Dr. José Luis Escamilla Reyes- Profesor del Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México desde 1998. Doctor en Física por la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Cuenta con una experiencia docente de 32 años. Es coautor de Manuales de Física II y Física III, así como de dos ebooks, uno sobre Física General y otro sobre Óptica y Física Moderna. Está certificado en el Programa de Desarrollo de Habilidades Docentes del Tecnológico de Monterrey. Ha participado con varios trabajos en Congresos Nacionales e Internacionales relacionados con la Física de Semiconductores de los grupos IV y III-V. Sus áreas de interés son: fuentes alternativas de energía, Física del Estado Sólido, diseño y aplicaciones de los MEMS y modelación matemática de Sistemas Complejos. Ha publicado más de 15 trabajos arbitrados y memorias en congresos. Colaboró en el diseño y construcción de láseres pulsados de N2 en el Laboratorio de Óptica Cuántica de la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa (UAMI). En el Tecnológico de Monterrey Campus Ciudad de México, participó en el desarrollo de un prototipo de Celda de Combustible con membrana de intercambio protónico (PEMFC) de alta eficiencia. Obtuvo la Medalla al Mérito Académico por el mejor promedio de Maestría otorgada por la UAMI. Fue líder de la Cátedra de Investigación "Micro Sistemas Electromecánicos: Diseño y aplicaciones" del Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México y miembro del SNI.

ÍNDICE REMISSIVO

A

C

D

E

F

I

K

L

M

P

Q

R

S

T