CIÊNCIAS SOCIALMENTE APLICÁVEIS:

INTEGRANDO SABERES E ABRINDO CAMINHOS

JORGE JOSÉ MARTINS RODRIGUES
MARIA AMÉLIA MARQUES
(Organizadores)

VOL VIII

EDITORA ARTEMIS
2023

CIÊNCIAS SOCIALMENTE APLICÁVEIS:

INTEGRANDO SABERES E ABRINDO CAMINHOS

JORGE JOSÉ MARTINS RODRIGUES
MARIA AMÉLIA MARQUES
(Organizadores)

VOL VIII

EDITORA ARTEMIS
2023

Editora Chefe	Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora Executiva	M.ª Viviane Carvalho Mocellin
Direção de Arte	M.ª Bruna Bejarano
Diagramação	Elisangela Abreu
Organizadores	Prof. Dr. Jorge José Martins Rodrigues Prof.ª Dr.ª Maria Amélia Marques
Imagem da Capa	cienpies
Bibliotecário	Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Editora Artemis
Curitiba-PR Brasil
www.editoraartemis.com.br
e-mail:publicar@editoraartemis.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

C569 Ciências socialmente aplicáveis [livro eletrônico] : integrando saberes e abrindo caminhos: vol. VIII / Organizadores Jorge Rodrigues, Maria Amélia Marques. – Curitiba, PR: Artemis, 2023.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
Edição bilíngue
ISBN 978-65-87396-81-1
DOI 10.37572/EdArt_300523811

1. Ciências sociais aplicadas – Pesquisa – Brasil. 2. Abordagem interdisciplinar do conhecimento. I. Rodrigues, Jorge José Martins. II. Marques, Maria Amélia.

CDD 307

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

2023

Editora Artemis
Curitiba-PR Brasil
www.editoraartemis.com.br
e-mail:publicar@editoraartemis.com.br

APRESENTAÇÃO

O oitavo volume desta coleção segue a lógica dos livros anteriores. Procura apresentar ao leitor uma coletânea de artigos sobre problemáticas que são transversais ao campo das ciências sociais aplicadas.

Sendo discutível, na metodologia seguida na organização dos vários volumes procurou-se privilegiar artigos que abordassem novas tendências e/ou problemáticas transversais relevantes, adotassem metodologias mais holísticas e/ou modelos de investigação aplicada, apresentassem estudos de caso nacionais e/ou internacionais e procurassem ser reflexivos. Nesse contexto, o presente volume está organizado em três grandes eixos – Programação, Sustentabilidade, Educação e redes sociais.

Na construção da estrutura de cada eixo procurou-se seguir uma lógica em que cada artigo possa contribuir para uma melhor compreensão do artigo seguinte, gerando-se um fluxo de conhecimento acumulado que se pretende fluido e em espiral crescente.

Assim, o eixo Programação é constituído por um conjunto de oito artigos. A programação pode ser entendida como um conjunto de actividades que visam transformar tarefas repetitivas e monótonas em rotinas cooperativas e colaborativas. Estas rotinas são algoritmos e modelos matemáticos geradores de informação estruturada e eficiente que, apesar da sua racionalidade limitada, é útil para a tomada de decisões, sejam individuais ou de grupo.

O eixo Sustentabilidade junta um conjunto de sete artigos que, em comum, contribuem para a construção da responsabilidade social. As mudanças climáticas estão a perturbar a vida de milhões de pessoas no planeta, com especial ênfase nas regiões rurais mais pobres e com impacto negativo na economia. Assim, exigem-se políticas públicas inclusivas que incentivem o uso de materiais multiusos, amigos do ambiente. Os resíduos sólidos urbanos necessitam de ser melhor geridos e as empresas deverão ser incentivadas a incorporar aquelas políticas nas suas estratégias, para reforço dos seus valores, conforto e bem-estar dos seus constituintes.

O eixo Educação e redes sociais tem seis artigos. As principais teorias de liderança parecem apontar para que esta seja contingencial, podendo ser ensinada e as respectivas competências treinadas e melhoradas. Todo o ensino, presencial ou a distância, tem os seus pontos fortes e pontos fracos. Exigem-se comportamentos éticos, nomeadamente em ambiente de redes sociais, para evitar fraudes quer com os conteúdos quer com a respectiva avaliação, com eventuais traumas psicológicos em quem é visado.

Com a disponibilização deste livro e seus artigos esperamos que os mesmos gerem inquietude intelectual e curiosidade científica, procurando a satisfação de novas necessidades e descobertas, motor de todas as fontes de inovação.

Jorge Rodrigues, ISCAL/IPL, Portugal
Maria Amélia Marques, IPS/ESCE, Portugal

SUMÁRIO

PROGRAMAÇÃO

CAPÍTULO 3

FAMÍLIAS ESTRUTURADAS DE MATRIZES ESTOCÁSTICAS SIMÉTRICAS

Data de submissão: 01/04/2023
Data de aceite: 18/04/2023

Cristina Paula da Silva Dias
Polytechnic Institute of Portalegre
NOVAMATH – Center for Mathematics and Applications, SST
New University of Lisbon
Lisbon – Portugal
https://orcid.org/0000-0001-6350-5610

Carla Maria Lopes da Silva Afonso dos Santos
Polytechnic Institute of Beja
NOVAMATH – Center for Mathematics and Applications, SST
New University of Lisbon
Lisbon – Portugal
https://orcid.org/0000-0002-0077-1249

João Tiago Praça Nunes Mexia
Department of Mathematics and NOVAMATH – Center for Mathematics and Applications, SST
New University of Lisbon
Lisbon - Portugal
https://orcid.org/0000-0001-8620-0721

RESUMO: Neste artigo desenvolvem-se modelos da forma $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu} + \bar{\boldsymbol{E}}$ de grau *k* para matrizes estocásticas simétricas, sendo $\boldsymbol{\mu}$ a matriz média e $\bar{\boldsymbol{E}}$ uma matriz estocástica simétrica, com matriz média nula. Os modelos são desenvolvidos a partir da análise espectral das respetivas matrizes médias $\boldsymbol{\mu}$. A informação contida ma matriz estocástica pode ser condensada nos seus vetores de estrutura e na soma dos quadrados dos resíduos. Quando as matrizes de uma família correspondem aos tratamentos de um delineamento base, dizemos que a família é estruturada. Para além destes modelos, também se consideraram os modelos de famílias estruturadas. Os modelos destas famílias estão associados aos tratamentos de um delineamento base. A ação dos fatores que se consideram no delineamento base, sobre os vetores de estrutura é também analisada. A ação dos fatores, que se consideram no delineamento base, sobre os vetores de estrutura das matrizes da família será analisada. Utilizamos para isso a ANOVA (Análise de Variância) e técnicas relacionadas, no estudo da referida ação sobre combinações lineares das componentes dos vetores de estrutura sobre as *m* matrizes do modelo. As famílias estruturadas que consideramos têm, delineamentos base ortogonais, associados a partições ortogonais. A hipótese a ser testada, sobre a ação dos fatores no delineamento base, está associada a partições ortogonais. Mostraremos como realizar análises transversais e longitudinais para famílias de matrizes estocásticas simétricas com valor próprio dominante associado a modelos ortogonais.

PALAVRAS-CHAVE: Base design. Matrizes estocásticas simétricas. Modelos. Famílias estruturadas.

STRUCTURED FAMILIES OF SYMMETRIC STOCHASTIC MATRICES

ABSTRACT: In this paper we develop models of the form $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu} + \bar{\boldsymbol{E}}$ of degree k for symmetric stochastic matrices, being **μ** the mean matrix and $\bar{\boldsymbol{E}}$ a symmetric stochastic matrix, with null mean matrix. The models are developed from the spectral analysis of the respective mean matrices **μ**. The information contained in a stochastic matrix can be condensed into its structure vectors and the sum of squares of the residuals. When the matrices of a family correspond to the treatments of a base design, we say that the family is structured. In addition to these models, models of structured families were also considered. The models of these families are associated to the treatments of a base design. The action of the factors considered in the base design on the structure vectors is also analysed. The action of the factors considered in the base design on the structure vectors of the family matrices will be analyzed. We use for this the ANOVA (Analysis of Variance) and related techniques, in the study of said action on linear combinations of the components of the structure vectors on the m matrices of the model. The structured families we consider have, orthogonal base delineations, associated with orthogonal partitions. The hypothesis to be tested, about the action of the factors in the base design, is associated with orthogonal partitions. We will show how to perform cross-sectional and longitudinal analyses for families of symmetric stochastic matrices with dominant eigenvalue associated to orthogonal models.
KEYWORDS: Base design. Symmetric stochastic matrix. Models. Structured families.

1 INTRODUÇÃO

O uso do par dado pelo valor próprio dominante e o correspondente vetor próprio, para condensar informação de uma matriz estocástica simétrica, mostrou ser muito útil, quando são consideradas séries de estudo, (Escoufier, 1973, 1978; Oliveira et al.,1999b).

Nestas séries de estudos consideram-se trios de matrizes $(\mathbf{X}, \mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}})$, constituídos por uma matriz de dados $\mathbf{X}$ e duas matrizes de pesos, uma para objetos e outra para variáveis, $\mathbf{D}\,\mathrm{e}\,\dot{\mathbf{D}}$, respetivamente. Quando os objetos são os mesmos para todos os estudos duma série a mesma diz-se do primeiro tipo. Quando as variáveis são as mesmas para todos os estudos duma série a mesma diz-se do segundo tipo. Escoufier (1978) definiu os operadores $\boldsymbol{A_i} = \boldsymbol{X}_i\dot{\boldsymbol{D}}_i\boldsymbol{X}_i^t\boldsymbol{D}_i$, $i = 1, \dots, n$ e $\boldsymbol{B_i} = \boldsymbol{X}_i^t\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{X}_i\dot{\boldsymbol{D}}_i$, $i = 1, \dots, n$ para representar os estudos $(\mathbf{X}_i, \mathbf{D}_i, \dot{\mathbf{D}}_i)$, $i = 1, \dots, n$, no caso de séries de primeiro e do segundo tipo, respetivamente.

De seguida obtém-se o produto interno $\boldsymbol{A}_i|\boldsymbol{A}_{i'} = tr(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_{i'}^t), i = 1, \dots, k$ ou $\boldsymbol{B_j}|\boldsymbol{B}_{j'} = tr(\boldsymbol{B}_j, \boldsymbol{B}_{j'}^t), i, j = 1, \dots, k$, onde *tr* corresponde ao traço da matriz. Estas são as matrizes cuja informação é condensada sempre que têm um valor próprio principal. Apresentamos de seguida uma formulação geral da condensação da informação numa matriz simétrica com um valor próprio dominante, tanto para matrizes singulares como para famílias estruturadas cujas matrizes correspondem aos tratamentos de um delineamento base. Isto abre um vasto leque de aplicações possíveis.

Além de conjuntos singulares de estudos, podemos considerar famílias estruturadas cujas séries correspondem aos tratamentos de um delineamento base (Oliveira et al., 2007).

Os modelos serão obtidos a partir da análise espectral das matrizes médias $\boldsymbol{\mu}$, e são dados por

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu} + \overline{\boldsymbol{E}} = \sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}} \lambda_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{t}} + \overline{\boldsymbol{E}} \ , \quad (1)$$

com $(\lambda_j, \boldsymbol{\alpha}_j)$ os pares valores de valores próprios e vetores próprios de $\boldsymbol{\mu}$ e $\bar{\boldsymbol{E}}$ uma matriz estocástica simétrica (Areia, 2009; Dias, 2013). De forma a evitar a possibilidade de se obter um número grande de pequenos valores próprios, assume-se que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k$.

Sendo $\boldsymbol{\beta}_j = \lambda_j \boldsymbol{\alpha}_j, j = 1, \dots, k$, a informação contida na matriz $\boldsymbol{M}$ pode ser condensada num vetor de estrutura dado por $\boldsymbol{\beta} = \left[\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{t}} \dots \boldsymbol{\beta}_k^{\boldsymbol{t}}\right]^{\boldsymbol{t}}$, e por uma soma de quadrados de resíduos

$$V = \|\boldsymbol{M}\|^2 - \|\boldsymbol{\beta}\|^2, \quad (2)$$

onde || || representa a norma euclidiana quer para matrizes quer para vetores.

A seguir, na secção 3, estudamos famílias estruturadas de matrizes estocásticas simétricas. As matrizes nestas famílias correspondem aos tratamentos de um delineamento base com efeitos fixos. Estudamos então a ação dos fatores do delineamento base sobre os vetores de estrutura das matrizes. Quando se assume que o primeiro valor próprio das matrizes é dominante, o tratamento do modelo pode ser aligeirado restringindo-o ao primeiro vetor estruturado das matrizes (Oliveira, et al.,1999b, 2007b).

2 MODELOS

Dada uma matriz $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ aleatória simétrica $k \times k$, a respetiva matriz média $\boldsymbol{\mu}$ quando definida, será simétrica tendo a decomposição espectral

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{\alpha}_i^t \ , \quad (3)$$

vindo

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{\alpha}_i^t + \bar{\boldsymbol{E}}, \quad (4)$$

com $\overline{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{t}})$ uma matriz estocástica simétrica com matriz média nula e $\boldsymbol{E}$ uma matriz de erros, com $vec\ (\boldsymbol{E})$ normal com valor médio nulo e matriz de covariância $\sigma^2 \boldsymbol{I}_{n^2}$

(define-se $vec\ (\boldsymbol{E})$ como sendo o agrupamento dos vetores coluna da matriz $\boldsymbol{E}$, isto é, com $\boldsymbol{E} = [a_{ij}]_{\boldsymbol{n\times m}}$, $\boldsymbol{ve}(\boldsymbol{E}) = (a_{11}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{1m}, \dots, a_{nm})$). Sendo $\boldsymbol{\mu}$ simétrica com característica k, ter-se-ão os pares $(\lambda_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ de valores próprios e vetores próprios, $i = 1, \dots, k$.

Sejam $(\theta_i, \boldsymbol{\gamma}_i)$, $i = 1, \dots, n$ os pares de valores próprios e vetores próprios da matriz $\boldsymbol{M}$ com $\theta_1 \geq \cdots \geq \theta_n$. De acordo com [6], utilizamos os $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_i = \theta_i^{1/2}\boldsymbol{\gamma}_i$, $i=1,\dots,k$ para estimar os vetores de estrutura $\boldsymbol{\beta}_i = \lambda_i^{1/2}\boldsymbol{\alpha}_i$. Assim, com $\boldsymbol{m}_1 \dots \boldsymbol{m}_n$, os vetores coluna da matriz $\boldsymbol{M}$, tem-se

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_i = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\gamma}_i = \boldsymbol{M}^t\boldsymbol{\gamma}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_1^t\boldsymbol{\gamma}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{m}_n^t\boldsymbol{\gamma}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1^t\boldsymbol{m}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\gamma}_i^t\boldsymbol{m}_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$= \left(\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{\gamma}_i^t\right)\begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{m}_n \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$= \left(\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{\gamma}_i^t\right)\boldsymbol{Z}, \quad i = 1, \dots, k$$

com $\otimes$ a indicar o produto matricial de Kronecker, tendo-se $\boldsymbol{Z} = vec(\boldsymbol{M})$. Assim, $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_i$, $i = 1, \dots, k$ terá vetor médio

$$E(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_i) = (\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{\gamma}_i^t)\boldsymbol{\eta}\ , \ i = 1, \dots, k\ , \tag{7}$$

e matriz de covariância

$$\sum(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_i) = \sigma^2(\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{\gamma}_i^t)\ \boldsymbol{L}\ (\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{\gamma}_i)\ , \ i = 1, \dots, k. \tag{8}$$

com $\boldsymbol{L} = \Sigma(\boldsymbol{Z})$.

Se $\mathbf{M}$ tem grau k e os $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \dots, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_k$ forem bons estimadores dos $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_k$, e $\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_k$ bons estimadores de $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_k$, teremos

$$\bar{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{M} - \sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\alpha}_i^t \approx \boldsymbol{M} - \sum_{i=1}^{k}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_i\boldsymbol{\gamma}_i^t = \boldsymbol{M} - \sum_{i=1}^{k}\left(\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{\gamma}_i^t\right)\boldsymbol{Z}\ \boldsymbol{\gamma}_i^t \tag{9}$$

vindo

$$vec\ (\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\gamma}_i^t)\mathbf{Z}\ \boldsymbol{\gamma}_i^t) = \sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{\gamma}_i \otimes \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\gamma}_i^t)\mathbf{Z}\ , \tag{10}$$

pelo que, com

$$\boldsymbol{W} = \sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{\gamma}_i \otimes \boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{\gamma}_i^t)\ , \tag{11}$$

teremos,

$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{I}_{n^2} - \boldsymbol{W})\boldsymbol{Z}\ , \tag{12}$$

vindo a matriz de covariâncias de $\mathbf{R}$ dada por

$$\sum(\boldsymbol{R}) = \sigma^2(\boldsymbol{I}_{n^2} - \boldsymbol{W})\boldsymbol{L}(\boldsymbol{I}_{n^2} - \boldsymbol{W}^t). \tag{13}$$

Enquanto $\mathbf{R}$ pode ser considerado como um vetor de resíduos,

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \left[\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1^t, \dots, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_k^t\right]^t, \tag{14}$$

será o vetor de estrutura global ajustado (Mexia, 1990 e 1995).

Os vetores $\mathbf{R}$ e $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ desempenham um papel importante na inferência e, uma vez que, estes vetores não são independentes, é necessário encontrar um vetor dos resíduos homocedástico e independente do vetor $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{BZ}$, com

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{\gamma}_i^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{\gamma}_k^t \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores coluna da matriz de covariância

$$\Sigma\left(\boldsymbol{R};\ \widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right) = (\boldsymbol{I}_{n^2} - \boldsymbol{W})\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}^t, \tag{16}$$

a qual tem característica r, obtêm-se r vetores ortonormalizados $\boldsymbol{z}_1$, ... $\boldsymbol{z}_r$. Sejam $\boldsymbol{\delta}_i, i = 1, \dots, n^2$ os vetores com n^2 componentes, dos quais $n^2 - 1$ são nulos e a *i*-ésima componente é igual a um. Aplicando novamente o método de Gram-Schmidt aos vetores $\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_r, \boldsymbol{\delta}_1, \dots, \boldsymbol{\delta}_{n^2-a}$, obtêm-se não só os vetores $\boldsymbol{z}_1, \dots \boldsymbol{z}_r$ mas também os vetores linha da matriz $\boldsymbol{A}$: $a_1, \dots, a_{n^2-r}$.

Sendo a matriz de covariância $\boldsymbol{AR}$ dada por

$$\Sigma(\boldsymbol{AR}) = \sigma^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_{n^2} - W)\boldsymbol{L}(\boldsymbol{I}_{n^2} - \boldsymbol{W}^t)\boldsymbol{A}^t,$$

se $\Sigma(\boldsymbol{AR})$ tem característica g terá valores próprios positivos $\nu_1, \dots, \nu_g$ (uma vez que as matrizes de covariância não têm valores próprios negativos), associados aos vetores próprios $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_g$.

Assim, com

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{D}\left(\nu_1^{-1/2}, \dots, \nu_g^{-1/2}\right)\left[\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_g\right]^t,$$

sendo $\boldsymbol{D}\left(\nu_1^{-1/2}, \dots, \nu_g^{-1/2}\right)$, a matriz diagonal com elementos principais $\nu_1^{-1/2}, \dots, \nu_g^{-1/2}$, tem-se $\Sigma(\boldsymbol{GAR}) = \sigma^2 \boldsymbol{I}_g$ com

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{GAR} = \left(\dot{\boldsymbol{R}}_1, \dots \dot{\boldsymbol{R}}_g\right), \tag{17}$$

um vetor de resíduos homocedástico. Quando a normalidade é assumida, $\dot{\boldsymbol{R}}$ e $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ serão independentes e normais. Somos, assim, levados a testar as hipóteses

$$H_{ok} : \dot{\boldsymbol{R}}_1, \dots, \dot{\boldsymbol{R}}_g \ i.i.d. \sim N(0, \sigma^2),$$

utilizando a estatística

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{g\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{2}}}{\sum_{j=1}^{g} \dot{\boldsymbol{R}}_j^2 - g\dot{\boldsymbol{R}}_0^2}, \tag{18}$$

para testar H_{ok}.

Sendo $\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{0}} = \frac{1}{g}\sum_{j=1}^{g} \dot{\boldsymbol{R}}_j$, $\tilde{\mathcal{F}}$ será o quociente de dois qui-quadrados independentes, com 1 e $g-1$ graus de liberdade. Se $\bar{f}_{q/2}$ e $\bar{f}_{1-q/2}$ são os quantis de probabilidades $q/2$ e $1- q/2$ respetivamente, para aquele quociente, então o intervalo $\left[\bar{f}_{q/2}; \bar{f}_{1-q/2}\right]$ contém a região de aceitação de nível q para o modelo e, a correspondente região de rejeição será $\left[0; \bar{f}_{q/2}\right] \cup [\bar{f}_{1-q/2}; +\infty[$. Quando H_{ok} não se verifica, o numerador e denominador de F terá parâmetros de não centralidade δ_1 e δ_2. Haverá alternativas à hipótese H_{ok} em que δ_1 predomina sobre δ_2 (δ_2 predomina sobre δ_1) e, em que F tende a tomar valores superiores (inferiores) aos que tomaria, caso H_{ok} se verificasse. Quando a hipótese não é rejeitada, σ_2 pode ser estimado por $\tilde{\sigma}^2 = \frac{\|\dot{\boldsymbol{R}}\|^2}{g}$.

Na prática pode ajustar-se o modelo baixando o valor de *k* até se obter uma rejeição. Salienta-se que, $\bar{f}_p = f_{1,g-1,p}$, com $f_{1,g-1,p}$ será o quantil de ordem *p-th* para a distribuição central F, que terá 1 e $g-1$ graus de liberdade.

3 FAMÍLIAS ESTRUTURADAS

Depois de considerarmos os modelos isolados, estudamos agora o caso das famílias estruturadas de modelos. Um primeiro exemplo destas famílias é o dos delineamentos multi-regressionais (Carvalho et al., 2015; Moreira et al., 2005a). Assim, para cada tratamento de um delineamento base, temos uma regressão linear sobre as mesmas variáveis.

As matrizes dos valores das variáveis controladas e a variância do erro, são assumidas como sendo as mesmas para as diferentes regressões, (Carvalho et al., 2015). A inferência para esta família de regressões está centrada nos vetores de coeficientes ou, mais geralmente, nos vetores estimáveis, conduzindo a resultados interessantes (Mexia, 1987; Carvalho et al., 2015; Moreira et al., 2005a, 2005b; Moreira et al., 2007, 2008; Cantarinha, 2012).

Estes modelos, numa família estruturada, correspondem aos tratamentos de um delineamento base com efeitos fixos. O caso mais interessante é quando a ausência de efeitos e interações para os fatores do delineamento base estão associados aos espaços de uma partição ortogonal

$$R^d = \boxplus_{j=1}^{m} \varpi_j$$

Considerando que os vetores linha, g_j, das matrizes $\boldsymbol{A}_j$ constituem uma base ortonormal para ϖ_j, $j=1,\ldots,m$, tem-se a soma de quadrados dada por

$$S_j = \left\|\boldsymbol{A}_j \boldsymbol{Y}\right\|^2, j = 1, \ldots, m\ , \tag{19}$$

onde $\boldsymbol{Y}$ é um vetor cujas componentes correspondem aos tratamentos de um delineamento base. Por exemplo, se os modelos numa família estruturada são para matrizes estocásticas simétricas com o primeiro valor próprio dominante, então será dada enfase a ação dos fatores sobre o delineamento base dos primeiros vetores de estrutura para os quais temos os estimadores

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1(h) = \left(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{1,1}(h) \ldots \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{1,n}(h)\right)\ , h = 1, \ldots, d. \tag{20}$$

Estamos, pois, no caso equilibrado em que a Análise de Variância e as técnicas a ela associadas são robustas para calcular os vetores de componentes homólogas dos primeiros vetores de estrutura estimados

$$\boldsymbol{Z}(l) = \left(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{1,l}(1) \ldots \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{1,l}(d)\right)\ , l = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

(Ito, 1980; Scheffé, 1959).

Os resultados obtidos permitem realizar inferência transversal e longitudinal. Na primeira trabalha-se com as componentes homólogas do vetor de estrutura, e na segunda trabalha-se com vetores de contrastes nas componentes desse vetor

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{c}) = \left(\boldsymbol{c}^t\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1(1), \ldots, \boldsymbol{c}^t\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1(d)\right). \tag{22}$$

Por forma a se evitarem repetições, representa-se por $\dot{\boldsymbol{z}}$ o vetor sobre o qual será efetuada a análise de variância. As somas dos quadrados são dadas por

$$S_j = \left\|\boldsymbol{A}_j \dot{\boldsymbol{z}}\right\|^2, j = 1, \ldots, m, \tag{23}$$

salienta-se, agora, que a hipótese associada a pode ser escrita como

$$H_{0,j}\colon\ \boldsymbol{A_j\eta} = 0_{g_j}\,, j = 1, \dots, m, \tag{24}$$

com $\boldsymbol{\eta}$ o vetor médio de $\mathbf{Z}(\boldsymbol{c})$. Esta hipótese verifica-se se e só se $\boldsymbol{\eta} \in \omega_j\,, j=1,\dots,m$, com $\boldsymbol{\omega}_j$ o complemento ortogonal de $\varpi_j\, j=1,\dots,m$.

Em geral, utilizamos a soma da soma de quadrados das interações de ordem superior para estimar o erro. Seja D o conjunto de índices destas interações, então com

$$\begin{cases} S = \sum_{j\in\mathcal{D}} S_j \\ g = \sum_{j\in\mathcal{D}} g_j \end{cases}, \tag{25}$$

tem-se a estatística de teste

$$\mathcal{F}_j = \frac{g}{g_j}\,\frac{S_j}{S}\ , j \notin \mathcal{D}\,, \tag{26}$$

com g_j e g graus de liberdade (Mexia, 1990 e 1995).

Quando se tem u fatores com $J_1 .. J_u$ níveis no delineamento base, ter-se-á $2^u \subset \bar{\bar{u}} = \{1, \dots, u\}$ conjuntos de

$$n = \prod_{i=1}^{u} u_j,$$

Admitamos que se tem u fatores com $J_1 .. J_u$ níveis no delineamento base, e que se consideram todas as combinações possíveis dos mesmos. Estas combinações corresponderão aos tratamentos, havendo, pois, tratamentos. Além do valor médio geral, há que considerar os efeitos dos níveis dos vários fatores e as interações para as várias combinações de níveis dos conjuntos de mais de um fator. Identificando os fatores com os seus índices os conjuntos de fatores serão os sub-conjuntos de

$$\bar{\bar{u}} = \{1, \dots, u\}.$$

Dado $\varphi \subseteq \bar{\bar{u}}$, se $\#(\varphi)=0$, obtém-se o conjunto vazio correspondendo-lhe o valor médio geral; se $\#(\varphi)=1$ corresponder-lhe-ão os efeitos dos níveis do único factor com índice em φ. Quando $\#(\varphi)>1$, corresponderão as interações entre conjuntos de níveis de fatores em φ.

Assim, para se obter a soma de quadrados para os efeitos e interações see (Dias, 2013), têm-se as matrizes

$$\boldsymbol{A}(\varphi) = \otimes_{l=1}^{u} \boldsymbol{A}_l(\varphi)\ ; \varphi \subseteq \bar{\bar{u}}, \tag{27}$$

onde $\otimes$ indica o produto de Kronecker de matrizes

$$\boldsymbol{A}_l(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{J_l}} \mathbf{1}_{J_l}^t, l \notin \varphi \\ \boldsymbol{T}_{J_l}, l \in \varphi \end{cases}, \; l = 1, \dots, u; \; \varphi \subseteq \bar{\bar{u}}, \tag{28}$$

sendo $\boldsymbol{T}_{Jl}$ obtida retirando a primeira linha igual a $\frac{1}{\sqrt{J_l}} \mathbf{1}_{J_l}^t$ a uma matriz ortogonal quando $l \in \varphi$. Assim, $\boldsymbol{A}(\varphi)$ tem característica $J_l \times J_l$ com

$$g(\varphi) = \prod_{l \in \varphi} (J_l - 1); \; \varphi \subseteq \bar{\bar{u}}, \tag{29}$$

graus de liberdade para a hipótese associada a φ.

A ordem da interação de um fator é o número de fatores tomados por ele menos um, pelo que agora se pode tomar

$$D_h = \{\varphi, \#(\varphi) \geq h\}, \tag{30}$$

vindo

$$\begin{cases} S = \sum_{\#(\varphi) \geq h} S(\varphi) \\ g = \sum_{\#(\varphi) \geq h} g(h) \end{cases}, \tag{31}$$

com

$$S(\varphi) = \|\boldsymbol{A}(\varphi)\boldsymbol{Z}\|^2 \; ; \; \varphi \leq \bar{\bar{u}}, \tag{32}$$

tendo-se a estatística

$$\mathcal{F} = \frac{g}{g(\varphi)} \; \frac{S(\varphi)}{S}, \; \#(\varphi) < h, \tag{33}$$

com $g(\varphi)$ e g graus de liberdade.

Como alternativa pode ser considerado o caso em que se tem os estimadores $\tilde{\sigma}_h^2$ para $h=1,\dots,d$. Isto é, não se rejeita a homocedasticidade do vetor $\boldsymbol{R}_h$, $h=1,\dots,d$ para nenhuma matriz da família. Aplicando o teste Chi-quadrado de Bartlett a

$$H_{0,j}: \sigma_1^2 = \cdots = \sigma_d^2 = \sigma^2, j = 1, \dots, m \tag{34}$$

e, no caso, desta hipótese não ser rejeitada, podemos utilizar o estimador

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{d} \sum_{h=1}^{d} \tilde{\sigma}_h^2, \tag{35}$$

com g_h o número de componentes de $\dot{\boldsymbol{R}}_h, h = 1, \dots, d$ e

$$\bar{g} = \sum_{h=1}^{d} g_h. \tag{36}$$

Assim, para testar todas as $H_{0,j}, j = 1,..., m$, usamos a estatística

$$\mathcal{F}_j = \frac{1}{g_j}\frac{S_j}{\tilde{\sigma}^2} \ , j = 1, \dots, m, \tag{37}$$

tendo agora g_j e $\bar{g}$ graus de liberdade para $F_j, j=1,...,m$.

4 CONCLUSÕES

Neste artigo vimos como ajustar e validar modelos assentes na análise espectral de matrizes médias de matrizes estocásticas simétricas. Consegue-se assim uma formulação que permite condensar a informação contida numa matriz estocástica simétrica num par constituído por um vetor $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ de estrutura ajustado e numa soma *V* de quadrados de resíduos. Esta condensação é paralela á que se tem para regressões lineares sendo então $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ o vetor dos coeficientes ajustados e, continuando *V* a ser uma soma de quadrados de resíduos.

Esta possibilidade de condensação da informação contida numa matriz estocástica simétrica, torna estes modelos adequados para o estudo de famílias estruturadas. Nestas famílias os modelos correspondem aos tratamentos de um delineamento base. Assim, ao analisar-se uma tal família pode-se ir mais fundo do que quando se trabalha apenas com um modelo, já que, se pode estudar a ação dos fatores do delineamento base sobre os parâmetros dos modelos da família. No estudo apresentado considerou-se o caso de famílias estruturadas de modelos com delineamento base ortogonal, o que corresponde a estar-se numa situação de equilíbrio. Realizam-se análises de variância para estudar a ação dos fatores do delineamento base sobre combinações lineares $\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{\beta}_m$ das componentes dos vetores de estrutura das matrizes da família. Quando $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\delta}_i$ a análise incidirá sobre as *i*-ésimas componentes dos vetores de estrutura. Temos então, como vimos, uma Análise Transversal. Se a soma das componentes for nula, será um vetor de contraste e temos uma, Análise Longitudinal.

5 AGRADECIMENTOS

This work is funded by national funds through the FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., under the scope of the project UIDB/00297/2020 (Center for Mathematics and Applications).

REFERÊNCIAS

Areia, A. (2009). **Séries Emparelhadas de Estudos**. Ph.D. Thesis, University of Évora, Évora.

Cantarinha, A., (2012). **Resultados Assintóticos para Famílias Estruturadas de Modelos Colectivos**. *Aplicação aos Fogos Florestais em Portugal Continental*, Ph.D. Thesis, Universidade de Évora.

Carvalho, F., Mexia, J. T., Santos C. & Nunes C. (2015). **Inference for types and structured families of commutative orthogonal block structures**. *Metrika*, 78, 337–372.

Dias, C. (2013). **Models and Families of Models for Symmetric Stochastic Matrices**. Ph.D. Thesis, University of Évora, Évora.

Escoufier Y. (1973). **Le Traitement des Variables Vectorielles**. *Biometrics* 29(5), 751-760.

Escoufier Y., L. Hermier H. (1978). **A propos de la Comparaison Graphique des Matrices de Variance**. *Biom. J*. 20(5), 477-483.

Ito, P. K. (1980). **Robustness of Anova and Macanova Test Procedures**, P. R. Krishnaiah (ed), Handbook of Statistics1, Amsterdam: North Holland, pp. 199-236.

Lavit C. (1988). **Analyse Conjointe de Tableaux Quantitatifs**. Collection Méthods+ Programmes, Masson, Paris.

Lavit C., Escoufier Y., Sabatier R., Traissac P. (1994). **The ACT (STATIS method)**. *Computation Statistics & Data Analysis*, 97-119.

Mexia, J. T. (1990). **Best Linear Unbiased Estimates, Duality of F Tests and the Scheffé Multiple Comparison Method in Presence of Controlled Heteroscedasticity**. *Comp. Stat & Data Analysis, 10(3), 271-281.*

Mexia, J. T. (1995). **Introdução à Inferência Estatística Linear**. Centro de Estudos de Matemática Aplicada. Edições Universitárias Lusófonas: Lisboa.

Mexia, J. T. (1987). **Multi-treatment regression designs**. Trabalhos de Investigação, No 1. Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

Moreira E.E., Ribeiro A.B., Mateus E., Mexia J.T., Ottosen L.M. (2005a). **Regressional modelling of electrodialytic removal of Cu, Cr and As from CCA timber waste: application to sawdust**. *Wood Sci Technol* 39(4), 291–309.

Moreira E.E., Ribeiro A.B., Mateus E., Mexia J.T., Ottosen L.M. (2005b). **Regressional modelling of electrodia- lytic removal of Cu, Cr and As from CCA timber waste: application to wood chips**. *Listy Biometryczne* 42(1), 11–23.

Moreira E., Mexia J.T. (2007). **Multiple regression models with cross-nested orthogonal base model**. In: *Proceedings of the 56th session of the ISI 2007—International Statistical Institute, Lisboa.*

Moreira E. (2008). **Família estruturada de modelos com base ortogonal: teoria e aplicações**. Ph.D. Thesis, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa (in Portuguese).

Oliveira M. M., Mexia, J. T. (1998). **Tests for the rank of Hilbert-Schmidt product matrices**. *Advances in Data Science and Classifications*, 619-625.

Oliveira M. M., Mexia, J. T. (1999a). F tests for Hypothesis on the Structure.

Vectors of Series. Discussiones Mathematicae. *Biometrical Letters*, 19(2), 345-353.

Oliveira M. M., Mexia, J. T. (1999b). **Multiple Comparations for Rank one Common Structures.** Biometrical Letters. 36(2), 159-167.

Oliveira M. M., Mexia, J. T. (2007). **ANOVA like analysis of matched series of studies with a common structure.** *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137, 1862-1870.

Oliveira M. M., Mexia, J. T. (2007). **Modeling series of studies with a common structure**. *Computation Statistics and Data Analysis*, 51, 5876-5885.

Oliveira, M. M. & Mexia J. (1999b). **F Tests for Hypothesis on the Structure Vectors of Series**. *Discussiones Mathematicae*, 19(2), 345-353.

Oliveira, M. M. & Mexia, J. T. (2007b). **Modeling series of studies with a common structure**. *Computational Statistics & Data Analysis, 51, 5876-5885*.

Scheffé, H. (1959). **The Analysis of Variance**. New York: John Wiley & Sons.

SOBRE OS ORGANIZADORES

Jorge Rodrigues é economista. Licenciado, mestre e doutor em Gestão (ISCTE-IUL), com Agregação (UEuropeia). Mestre e pós-doutorado em Sociologia – ramo sociologia económica das organizações (FCSH NOVA). Professor coordenador com agregação no ISCAL – *Lisbon Accounting and Business School* / Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal. Exerceu funções de direção em gestão (planeamento, marketing, comercial, finanças) no setor privado, público e cooperativo. Contabilista certificado. É investigador integrado no Instituto Jurídico Portucalense. Ensina e publica nas áreas de empresa familiar e família empresária, estratégia e finanças empresariais, gestão global, governabilidade organizacional, marketing, planeamento e controlo de gestão, responsabilidade social e ética das organizações.
https://orcid.org/0000-0001-7904-0061

Maria Amélia Marques, Doutora em Sociologia Económica das Organizações (ISEG/ULisboa), Mestre em Sistemas sócio-organizacionais da atividade económica - Sociologia da Empresa (ISEG/ULisboa), Licenciada (FPCE/UCoimbra), Professora Coordenadora no Departamento de Comportamento Organizacional e Gestão de Recursos Humanos (DCOGRH) da Escola Superior de Ciências Empresariais, do Instituto Politécnico de Setúbal (IPS/ESCE), Portugal. Membro efetivo do CICE/IPS – Centro Interdisciplinar em Ciências Empresariais da ESCE/IPS. Membro e Chairman (desde 2019 da ISO-TC260 HRM Portugal. Tem várias publicações sobre a problemática da gestão de recursos humanos, a conciliação da vida pessoal, familiar e profissional, os novos modelos de organização do trabalho, as motivações e expectativas dos estudantes Erasmus e a configuração e dinâmica das empresas familiares. Pertence a vários grupos de trabalho nas suas áreas de interesses.
https://orcid.org/0000-0002-7196-3838

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

E

R

S

T

U

V