VOL V

EDUCAÇÃO:

TEORIAS, MÉTODOS E PERSPECTIVAS

PAULA ARCOVERDE CAVALCANTI
(ORGANIZADORA)

EDITORA ARTEMIS
2022

VOL V

EDUCAÇÃO:

TEORIAS, MÉTODOS E PERSPECTIVAS

PAULA ARCOVERDE CAVALCANTI
(ORGANIZADORA)

EDITORA
ARTEMIS
2022

Editora Chefe	Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora Executiva	M.ª Viviane Carvalho Mocellin
Direção de Arte	M.ª Bruna Bejarano
Diagramação	Elisangela Abreu
Organizadoras	Prof.ª Dr.ª Paula Arcoverde Cavalcanti
Imagem da Capa	Daniel Collier / 123RF
Bibliotecário	Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Editora Artemis
Curitiba-PR Brasil
www.editoraartemis.com.br
e-mail:publicar@editoraartemis.com.br

Editora Artemis
Curitiba-PR Brasil
www.editoraartemis.com.br
e-mail:publicar@editoraartemis.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E24 Educação [livro eletrônico]: teorias, métodos e perspectivas: vol.V / Organizadora Paula Arcoverde Cavalcanti. – Curitiba, PR: Artemis, 2022.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
Edição bilíngue
ISBN 978-65-87396-55-2
DOI 10.37572/EdArt_270522552

1. Educação. 2. Ensino – Metodologia. 3. Prática de ensino. I.Cavalcanti, Paula Arcoverde.

CDD 371.72

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

EDITORA ARTEMIS
2022

Editora Artemis
Curitiba-PR Brasil
www.editoraartemis.com.br
e-mail:publicar@editoraartemis.com.br

APRESENTAÇÃO

O Livro **“Educação: Teorias, Métodos e Perspectivas”** é composto de trabalhos que possibilitam uma visão de fenômenos educacionais que abarcam questões relacionadas às teorias, aos métodos, às práticas, à formação docente e de profissionais de diversas áreas do conhecimento, bem como perspectivas que possibilitam ao leitor um elevado nível de análise.

Sabemos que as teorias e os métodos que fundamentam o processo educativo não são neutros. A educação, enquanto ação política, tem um corpo de conhecimentos e, o processo formativo dependerá da posição assumida, podendo ser includente ou excludente.

Nesse sentido, o atual contexto – econômico, social, político – aponta para a necessidade de pensarmos cada vez mais sobre a educação a partir de perspectivas teóricas e metodológicas que apontem para caminhos com dimensões e proposições alternativas e includentes.

O **Volume V** possui 23 trabalhos luso-hispânicos que proporcionam reflexões acerca de teorias, formação e perspectivas educacionais em diversas áreas do conhecimento. São apresentadas reflexões e análises acerca da formação – inicial e continuada – para a construção de sujeitos sociais, participativos e críticos no contexto e na conjuntura em que vivemos. Desta forma, destacam-se os processos de ensino-aprendizagem ativos e permanentes que possibilitam a melhoria da formação de profissionais para que sejam capazes em atender as demandas de uma sociedade complexa.

A educação, entendida como um processo amplo que envolve várias dimensões, precisa ser (re)pensada, (re)analisada, (re)dimensionada, (re)direcionada e contextualizada.

Espero que façam uma boa leitura!

Paula Arcoverde Cavalcanti

SUMÁRIO

CAPÍTULO 8

EXPLORANDO CONCEITOS E RELAÇÕES DE GEOMETRIA ESFÉRICA NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA COM O GOOGLE EARTH[1]

Data de submissão: 19/02/2022
Data de aceite: 08/03/2022

Gabriel Plentz Motta
SEB Dom Bosco
Curitiba - PR, Brasil
http://lattes.cnpq.br/0405842182160230

Rudimar Luiz Nós
UTFPR
Curitiba - PR, Brasil
http://lattes.cnpq.br/4377393528295346
https://orcid.org/0000-0002-9219-0811

RESUMO: Apresentamos neste trabalho algumas características da geometria esférica e propomos duas atividades que contextualizam essas características. Nas atividades, planejadas para o Curso de Licenciatura em Matemática, abordamos conceitos de cartografia usando o *Google Earth*, um programa de computador que renderiza uma representação 3D da Terra com base em imagens de satélite. As atividades foram organizadas com o intuito de instrumentalizar os estudantes da Licenciatura em Matemática para o ensino de geometrias não Euclidianas, especificamente a geometria esférica, em conformidade com o que estabelecem as Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática da Secretaria de Estado da Educação do Paraná acerca do ensino de geometrias não Euclidianas no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Concluímos que o *Google Earth* é uma ferramenta fantástica para ser explorada no ensino de geometria esférica.

PALAVRAS-CHAVE: Geometrias não Euclidianas. Cartografia. Ensino de Matemática. Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná.

EXPLORING SPHERICAL GEOMETRY CONCEPTS AND RELATIONSHIPS IN MATHEMATICS-TEACHING DEGREE COURSE WITH GOOGLE EARTH

ABSTRACT: We present in this work some characteristics of spherical geometry and we propose two activities that contextualize these characteristics. In the activities, planned for the Mathematics-Teaching Degree Course, we cover cartography concepts using Google Earth, a computer program that renders a 3D representation of the Earth based on satellite imagery. The activities were organized with the aim of instrumentalize the Mathematics-Teaching Degree Course students to teach non-Euclidean geometries, specifically spherical geometry, in accordance with the Curriculum Guidelines for Basic Education –

[1] Este trabalho foi apresentado na Seção de Ensino do XL CNMAC – Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, evento online ocorrido em setembro de 2021.

Mathematics of the Paraná State Department of Education about the teaching of non-Euclidean geometries in Elementary and High School. We conclude that Google Earth is a fantastic tool to explore spherical geometry teaching.
KEYWORDS: Non-Euclidean geometries. Cartography. Mathematics Teaching. Curriculum Guidelines of Paraná State.

1 INTRODUÇÃO

Vivemos sobre uma superfície quase-esférica. A geometria Euclidiana (EUCLIDES, 2009) não é suficiente para explicar o nosso mundo, muito menos o universo que o cerca (WOLFSON, 2005).

> O mundo ao nosso redor tem proporcionado razões para grande parte do desenvolvimento da matemática. O fato de a Terra ser ela própria uma esfera, e o céu ter a aparência de uma concha invertida sobre nós, tem colocado curvas, círculos e esferas no coração da geometria desde os primeiros tempos. Essas características do mundo deram origem a problemas desafiadores para explicar, representar e modelar o universo da forma como o conhecemos. Como podemos representar em um desenho plano o ambiente tridimensional que vemos? Como podemos mapear a Terra esférica em um mapa bidimensional? A luta com esses problemas trouxe outras questões sobre as dimensões e a geometria. Às vezes, o mundo parece não combinar com a geometria estabelecida por Euclides, a qual foi aceita durante 2000 anos. Novos modelos para tratar com essas situações abriram novos e excitantes caminhos para os matemáticos (ROONEY, 2012, p. 97).

Desta forma, o estudo de geometrias não Euclidianas, como a geometria esférica por exemplo, é um tema pertinente à formação do professor e precisa ser abordada nos cursos de Licenciatura em Matemática. Ainda, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática da Secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED) (PARANÁ, 2008) estabelecem parâmetros para o ensino de geometrias não Euclidianas no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

> O Conteúdo Estruturante Geometrias, no Ensino Fundamental, tem o espaço como referência, de modo que o aluno consiga analisá-lo e perceber seus objetos para, então, representá-lo. Neste nível de ensino, o aluno deve compreender: [...] noções de geometrias não Euclidianas: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais (PARANÁ, 2008, p. 56).
>
> [...] Também, no Ensino Médio, aprofundam-se os estudos das noções de geometrias não Euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e elíptica (PARANÁ, 2008, p. 57).
>
> [...] Já na apresentação da geometria elíptica, fundamentá-la através do seu desenvolvimento histórico e abordar: postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésica; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos

> esféricos quanto à medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: polos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento (PARANÁ, 2008, p. 57).

Infelizmente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) não estabelece parâmetros para o ensino de geometrias não Euclidianas. Contudo, a BNCC de Matemática e suas Tecnologias propõe o uso de ferramentas tecnológicas e programas computacionais.

> Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações (BRASIL, 2018, p. 536).

Assim, propomos neste trabalho duas atividades que contextualizam algumas características e propriedades da geometria esférica, estas embasadas por teoremas demonstrados em Brannan *et al*. (2012), Doria (2019) e Motta (2018), e ilustradas em figuras tridimensionais construídas com o CorelDRAW (COREL, 2021), que pode ser substituído pelo GeoGebra 3D (GEOGEBRA3D, 2021; NÓS; SILVA, 2018, 2020). Essas atividades foram planejadas para o Curso de Licenciatura em Matemática (NÓS; MOTTA, 2021), sendo que no trabalho de pesquisa propomos também atividades de geometria esférica para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio (MOTTA, 2018).

2 GEOMETRIA ESFÉRICA

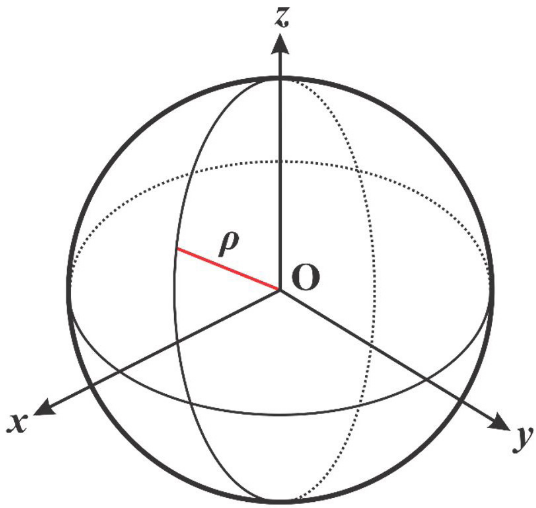
A geometria esférica é uma particularidade da geometria elíptica, ambas desenvolvidas pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). A geometria esférica satisfaz o Postulado 1, denominado postulado elíptico das paralelas (BRANNAN *et al*., 2012), o que a caracteriza como uma geometria não Euclidiana (BURTON, 2011; EVES, 2004; ROONEY, 2012).

Postulado 1. Dados uma reta r e um ponto P não pertencente à r, toda reta que passa por P intersecta r.

A geometria esférica é a geometria definida sobre a superfície S_ρ^2 de uma esfera E_ρ^2, de centro $O = (x_0, y_0, z_0)$ e raio ρ, ilustrada na Figura 1. Dessa forma, um ponto $P = (x, y, z)$, de abscissa x, ordenada y e cota z, pertence à S_ρ^2 se, e somente se,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \rho^2.$$

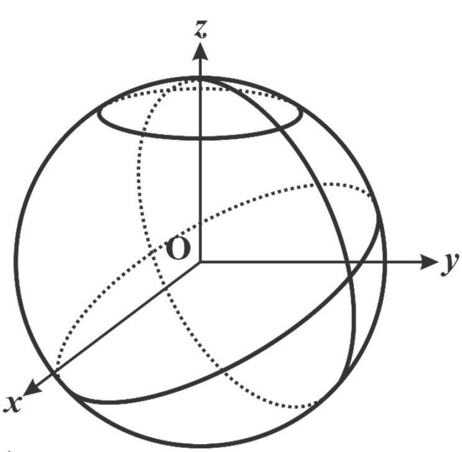
Figura 1: Superfície esférica S_ρ^2, de centro 0 e raio ρ.



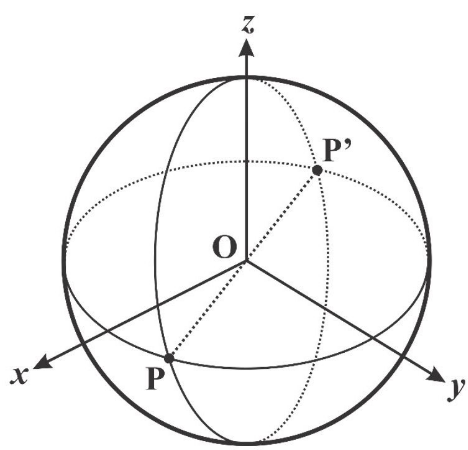
Fonte: Os autores.

A reta esférica é uma circunferência máxima de S_ρ^2 (BRANNAN *et al.*, 2012), isto é, uma circunferência que tem por centro o centro da superfície esférica. As circunferências de S_ρ^2 cujos centros não coincidem com o centro da superfície esférica são denominadas mínimas, como ilustra a Figura 2(a). Diferentemente da reta Euclidiana, que é infinita, a reta esférica tem comprimento finito. Duas retas esféricas, ou seja, duas circunferências máximas de S_ρ^2 , sempre se intersectam em dois pontos diametralmente opostos – Figura 2(b), denominados pontos antípodas.

Figura 2: Circunferências de S_ρ^2: (a) mínimas; (b) máximas.



(a)



(b)

Fonte: Os autores.

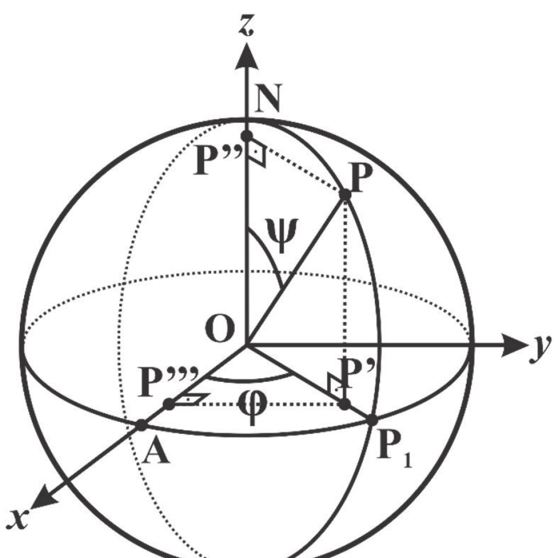
As coordenadas de um ponto $P \in S_\rho^2$, denominadas coordenadas esféricas de P, são de grande importância à comprovação de resultados na geometria esférica. Para todo ponto $P = (x, y, z) \in S_\rho^2$ há dois ângulos ψ e φ delimitados pelos eixos ortogonais $xOyOz$. Esses dois ângulos são suficientes para definirmos as coordenadas esféricas de P.

Consideremos o plano equatorial de S_ρ^2, no qual os pontos P_1 e $A = (\rho, 0, 0)$ pertencem ao equador, que é a circunferência máxima que passa pelos pontos $A = (\rho, 0, 0)$ e $B = (0, \rho, 0)$. Denotamos o ângulo $A\hat{O}P_1 = \varphi$, o qual rotaciona em torno do eixo z, ou seja, $0 \leq \varphi < 2\pi$, e o ângulo $N\hat{O}P = \psi$, onde $P \in S_\rho^2$ e ψ não excede uma medida angular de π radianos, ou seja, $0 \leq \psi \leq \pi$. O sentindo positivo para φ e ψ é o sentindo anti-horário, definido por rotações em S_ρ^2 (BRANNAN *et al.*, 2012; DORIA, 2019). Para definirmos as coordenadas esféricas de P em função dos ângulos φ e ψ, dadas pelo Teorema 1, devemos construir uma circunferência máxima C que passa por P_1, P e pelo polo N, como ilustra a Figura 3. Os polos N e S são definidos pela intersecção da superfície esférica com o seu eixo de revolução.

Teorema 1. Se $P = (x, y, z)$ é um ponto pertencente à S_ρ^2, com $0 \leq \varphi < 2\pi$ e $0 \leq \psi \leq \pi$, então as coordenadas esféricas de P são dadas por

$$P = \rho(\cos\varphi \operatorname{sen}\psi, \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi, \cos\psi).$$

Figura 3: Coordenadas do ponto $P \in S_\rho^2$ em função dos ângulos φ e ψ.



Fonte: Os autores.

Os segmentos de reta esféricos são denominados geodésicas. Uma geodésica de S_ρ^2 é um arco de circunferência máxima ou, mais especificamente, é todo arco de circunferência máxima que minimiza a distância entre dois pontos pertencentes à superfície esférica (DORIA, 2019).

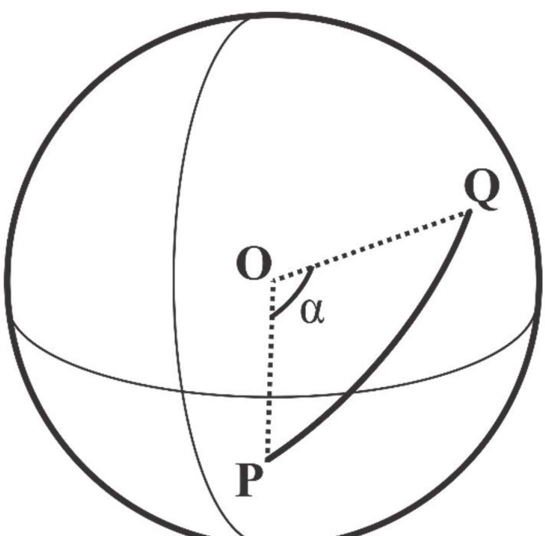
Teorema 2. Se $P, Q \in S_\rho^2$ são dois pontos não diametralmente opostos, então existe uma única geodésica em S_ρ^2 ligando P a Q.

Dados dois pontos $P, Q \in S_\rho^2$, o arco PQ é definido pelo ângulo $P\hat{O}Q = \alpha$, onde O é o centro de S_ρ^2 e $0 < \alpha \leq \pi$. Dessa forma, o comprimento da geodésica de extremos P e Q é a distância entre os pontos P e Q na superfície esférica, como ilustra a Figura 4.

Teorema 3. Se $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$ são dois pontos pertencentes à S_ρ^2 e α é o ângulo central correspondente ao arco de circunferência máxima de extremos P e Q, então a distância $d_{S_\rho^2}(P, Q)$ de P a Q é igual a

$$d_{S_\rho^2}(P,Q) = \rho\alpha = \rho\, arccos\left(\frac{p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3}{\rho^2}\right).$$

Figura 4: Uma geodésica de S_ρ^2: o arco PQ ou $d\,(P, Q)$.

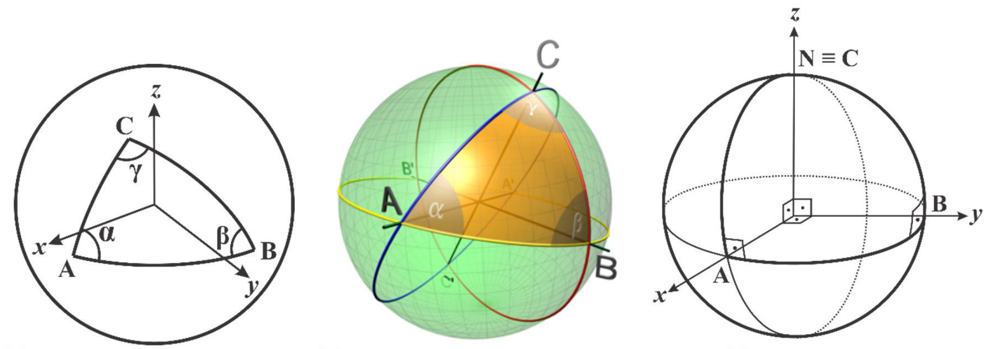


Fonte: Os autores.

Na geometria Euclidiana, três pontos distintos não colineares definem um único triângulo; na geometria esférica, três pontos distintos, não pertencentes simultaneamente à mesma geodésica e não diametralmente opostos dois a dois, definem oito triângulos esféricos, como ilustra a Figura 5(b). Em um triângulo esférico

ABC – Figura 5(a): os pontos A, B e C são os vértices; as geodésicas AB, AC e BC são os lados; α, β e γ são os ângulos internos.

Figura 5: Triângulos esféricos em S^2_ρ: (a) ângulos internos do triângulo ABC; (b) triângulos esféricos definidos por três pontos distintos; (c) triângulo esférico trirretângulo.



(a) (b) (c)

Fonte: (a) Os autores; (b) WikimediaCommons (2020); (c) os autores.

Considerando os pontos $A = (\rho, 0, 0)$, $B = (0, \rho, 0)$ e $C = (0, 0, \rho)$, o triângulo esférico ABC tem área equivalente a um oitavo da superfície esférica – Figura 5(c). Neste caso, os ângulos internos de ABC são todos retos, ou seja, iguais a $\frac{\pi}{2}$ ou 90°, pois os eixos $0x$, $0y$ e $0z$ são ortogonais entre si e cada uma das geodésicas AB, AC e BC está contida em um único plano que é ortogonal aos planos que contêm as outras duas. Um triângulo esférico com estas características é denominado trirretângulo, sendo que a soma dos ângulos internos desse triângulo é igual a 3π ou 270°. Este é um resultado importante e interessante, visto que, diferentemente da geometria Euclidiana, o triângulo esférico ABC tem ângulos internos cuja soma é maior do que π ou 180°.

Teorema 4. Se ABC é um triângulo em S^2_ρ cujos ângulos internos medem α, β e γ, então a área $\mathcal{A}$ de ABC é igual a

$$\mathcal{A}\ (\Delta ABC) = \rho^2\ [(\alpha + \beta + \gamma) - \pi]. \tag{1}$$

A medida (1) é positiva e pode ser reescrita como

$$\mathcal{A}\ (\Delta ABC) = \rho^2\ E, \tag{2}$$

onde $E = \alpha + \beta + \gamma$ é a deficiência (excesso) do triângulo esférico ABC, isto é, o quanto a soma dos ângulos internos de ABC excede π. A relação (2) viabiliza a demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

Teorema 5. Se ABC é um triângulo em S_ρ^2 com ângulos internos de medidas α, β e γ, então a soma dos ângulos internos de ABC é dada por

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi. \qquad (3)$$

Os limitantes inferior e superior na desigualdade (3) podem ser comprovados através de atividades práticas, tanto no Ensino Médio quanto na Licenciatura em Matemática (MOTTA, 2018).

Para calcular a área de um triângulo esférico pela relação (1), precisamos conhecer as medidas dos ângulos internos. Uma vez conhecidas as medidas dos lados do triângulo esférico – Teorema 3, a lei dos senos esférica e a lei dos cossenos esférica – Teoremas 6 e 7, respectivamente, possibilitam o cálculo da medida dos ângulos internos.

Teorema 6. Se ABC é um triângulo em S_ρ^2, cujos ângulos internos são α, β e γ e cujos lados opostos a esses ângulos medem, respectivamente, a, b e c, então

$$\frac{sen\alpha}{sen\left(\frac{a}{\rho}\right)} = \frac{sen\beta}{sen\left(\frac{b}{\rho}\right)} = \frac{sen\gamma}{sen\left(\frac{c}{\rho}\right)}.$$

Teorema 7. Se ABC é um triângulo em S_ρ^2, cujos ângulos internos são α, β e γ, e e cujos lados opostos a esses ângulos medem, respectivamente, a, b e c, e , então

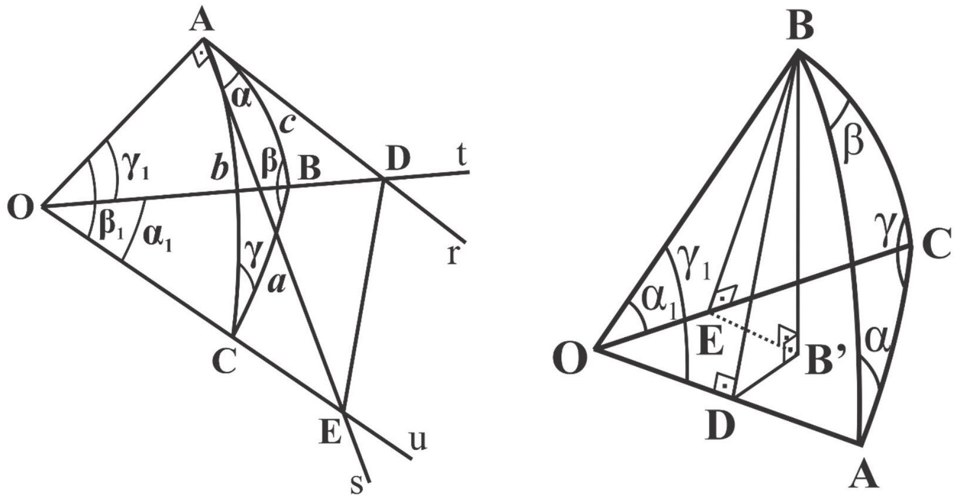
$$cos\alpha = \frac{cos\left(\frac{a}{\rho}\right) - cos\left(\frac{b}{\rho}\right)cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}{sen\left(\frac{b}{\rho}\right)sen\left(\frac{c}{\rho}\right)};$$

$$cos\beta = \frac{cos\left(\frac{b}{\rho}\right) - cos\left(\frac{a}{\rho}\right)cos\left(\frac{c}{\rho}\right)}{sen\left(\frac{a}{\rho}\right)sen\left(\frac{c}{\rho}\right)};$$

$$cos\gamma = \frac{cos\left(\frac{c}{\rho}\right) - cos\left(\frac{a}{\rho}\right)cos\left(\frac{b}{\rho}\right)}{sen\left(\frac{a}{\rho}\right)sen\left(\frac{b}{\rho}\right)}.$$

A demonstração dos Teoremas 6 e 7 depende do Teorema 3, de relações de geometria Euclidiana e de trigonometria (BRANNAN *et al.*, 2012; MOTTA, 2018). As Figuras 6(a) e 6(b) ilustram, respectivamente, a abordagem geométrica necessária à demonstração da lei dos cossenos e dos senos.

Figura 6: Trigonometria esférica: (a) lei dos cossenos; (b) lei dos senos.



(a) (b)

Fonte: Os autores.

3 ATIVIDADES NO *GOOGLE EARTH*

Os textos de Abrantes (2018), Alves (2009), Filho *et al*. (2018) e Jahn e Bongiovanni (2016) são leituras recomendadas para a etapa que antecede a aplicação das atividades. Esses textos exploram as relações entre geometria esférica e cartografia[2].

3.1 ATIVIDADE 1: A CIDADE MAIS DISTANTE DE CURITIBA

Nesta atividade, calculamos a distância entre as cidades de Curitiba, no Brasil, e Uruma, no Japão. Para tanto, os estudantes devem ser capazes de transformar coordenadas geográficas em coordenadas esféricas e de calcular o comprimento de uma geodésica.

A cidade mais próxima do ponto antípoda (diametralmente oposto) a Curitiba na superfície terrestre é, segundo FurthestCity (2021), a cidade de Uruma, no Japão. Conforme Wikipedia (2021), as coordenadas geográficas de Uruma são:

$$26°22'\,45''\,N; \tag{4}$$

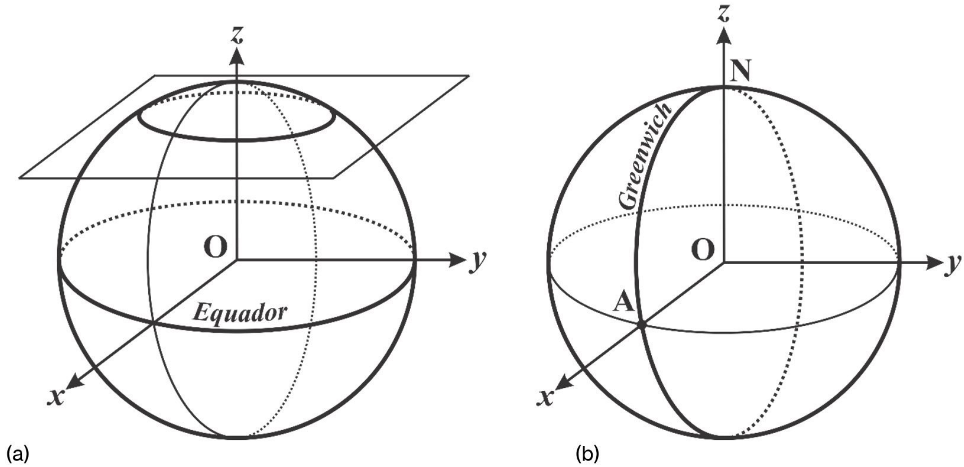
$$127°51'\,27''\,E. \tag{5}$$

A coordenada geográfica (4) é a latitude de Uruma, que está ao norte do equador. Em cartografia, o equador divide a superfície terrestre em norte (N) e sul (S). A latitude

[2] Ciência que se ocupa do traçado de mapas geográficos ou topográficos.

é a coordenada esférica de um ponto $P \in S_\rho^2$ dada pela distância entre esse ponto e o equador. A intersecção entre S_ρ^2 e um plano secante a S_ρ^2, paralelo ao equador, é uma curva denominada circunferência de latitude. Em particular, o equador é uma circunferência de latitude, ilustrado na Figura 7(a).

Figura 7: Circunferências máximas em S_ρ^2: (a) equador; (b) meridiano de Greenwich.



Fonte: Os autores.

A coordenada geográfica (5) é a longitude de Uruma, que está a leste do meridiano[3] de Greenwich. Em cartografia, considera-se o meridiano que passa pela cidade inglesa de Greenwich como sendo o marco zero para se determinar a longitude de um ponto, dividindo a superfície esférica em ocidente (W) e oriente (E). A longitude é a coordenada esférica de um ponto $P \in S_\rho^2$ dada pela distância entre esse ponto e o meridiano de Greenwich, ilustrado na Figura 7(b).

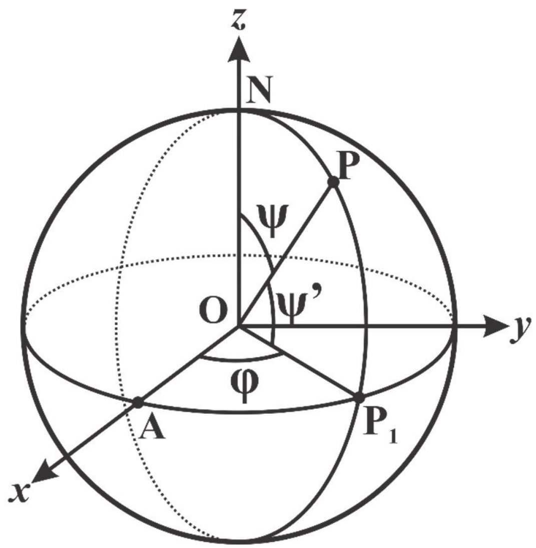
A latitude (N ou S) e a longitude (E ou W) de um ponto P são dadas, respectivamente, pelos ângulos

$$\psi' = \frac{\pi}{2} - \psi$$

e φ, onde ψ é a colatitude (ângulo complementar da latitude) de P. A Figura 8 ilustra os ângulos ψ e φ, os quais determinam, juntamente com a medida do raio ρ da superfície esférica, as coordenadas esféricas do ponto P – Teorema 1.

[3] Toda circunferência máxima de S_ρ^2 que passa pelo polo N.

Figura 8: Colatitude ψ e longitude φ do ponto P em S_ρ^2.



Fonte: Os autores.

Desta forma, empregando o Teorema 1 e $\rho = 6371\ km$ como medida do raio médio da Terra, os estudantes transformam as coordenadas geográficas de Curitiba e de Uruma, presentes na Tabela 1, em coordenadas esféricas[4]. Em seguida, usando o Teorema 3, calculam a distância, em , entre as cidades de Curitiba e Uruma. Para finalizar, os estudantes utilizam o *Google Earth* (GOOGLE, 2021) para localizar na superfície terrestre Curitiba e Uruma, e comparam a distância entre as duas cidades fornecida pelo *Google Earth* com a distância previamente calculada.

Tabela 1: Coordenadas geográficas das cidades de Curitiba e de Uruma.

Cidade	Latitude	Colatitude	Colatitude (rad)	Longitude	Longitude (rad)
Curitiba	25°25′47″ S	64°34′13″ S	1,117	49°16′19″ W	0,8552
Uruma	26°22′45″ N	63°37′15″ N	1,0996	127°51′27″E	0,4712

Fonte: Google (2021) e Wikipedia (2021).

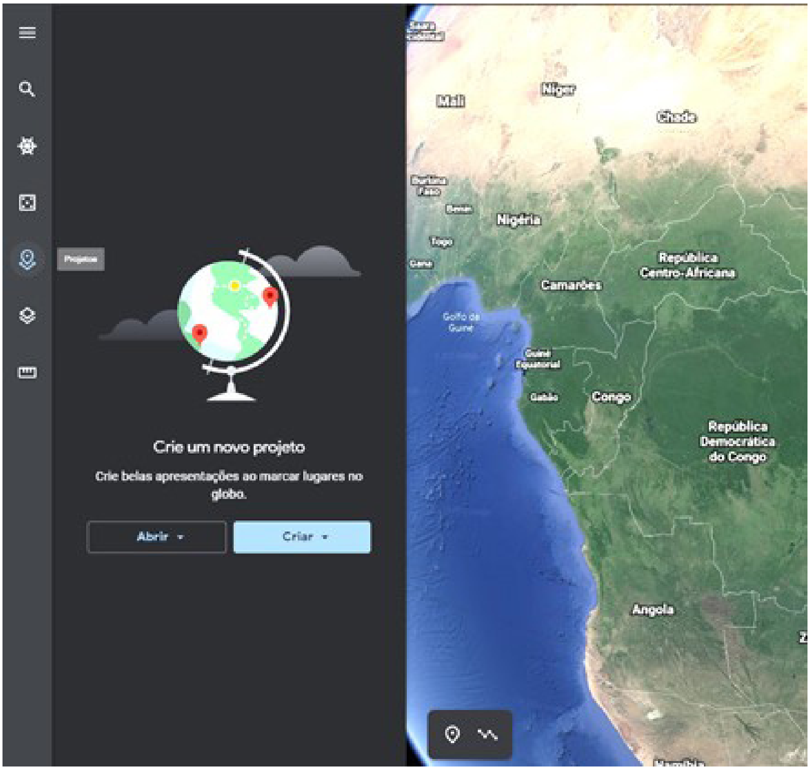
Descrevemos a seguir as etapas da atividade no *Google Earth*.

Etapas

1. Inicialmente, devemos criar um projeto no *Google Earth* através da barra lateral esquerda, no ícone “Projetos”, ilustrado na Figura 9. Em seguida, clicamos em “Criar” no menu de interação e selecionamos “Criar projeto no *Google Drive*” ou “Criar arquivo KML”, para que seja possível salvar o projeto na nuvem ou em um dispositivo, respectivamente.

[4] Os estudantes empregam máquina calculadora e convertem graus em radianos.

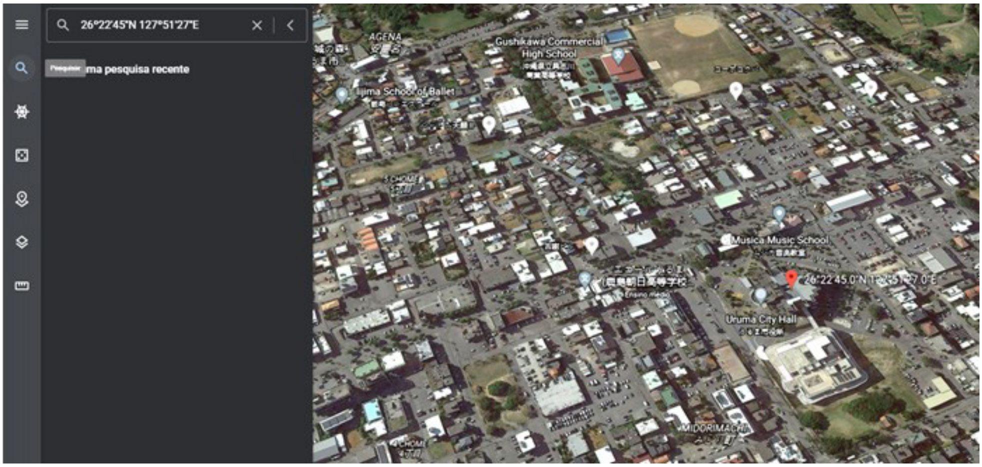
Figura 9: Criando um projeto no *Google Earth*.



Fonte: Google (2021).

2. Para localizar Uruma, no Japão, clicamos em "Pesquisar" e digitamos as coordenadas geográficas da cidade, como ilustra a Figura 10.

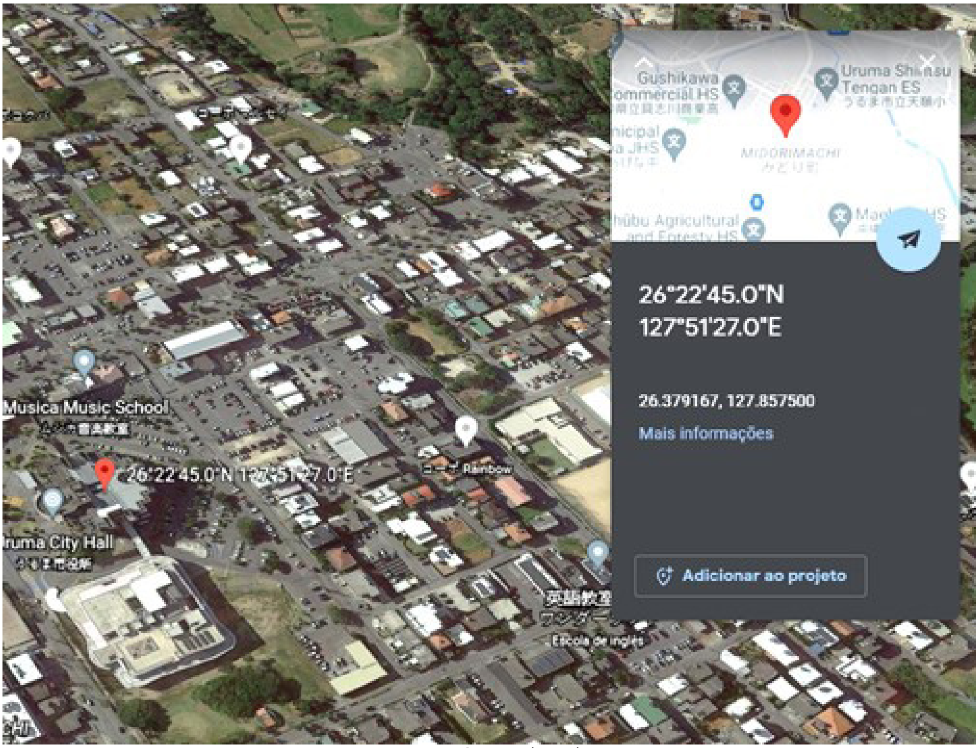
Figura 10: Localizando Uruma no Japão.



Fonte: Google (2021).

3. Determinada a localização, clicamos em “Adicionar ao projeto” – Figura 11, e armazenamos o projeto criado para a atividade.

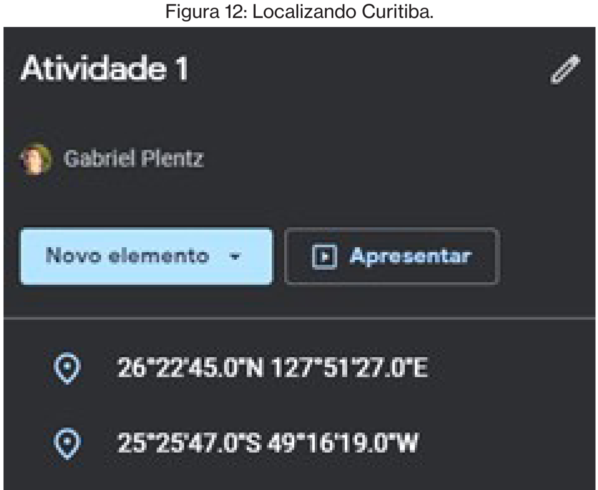
Figura 11: Adicionando o projeto.



Fonte: Google (2021).

4. Repetimos as etapas 2 e 3 para localizar a cidade de Curitiba – Figura 12.

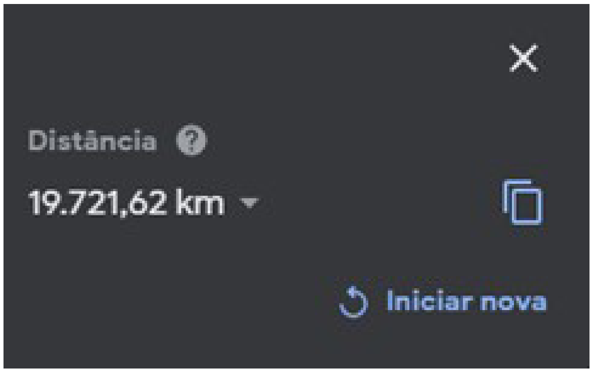
Figura 12: Localizando Curitiba.



Fonte: Google (2021).

5. Com a ferramenta “Medir distância e área” no menu lateral esquerdo, clicamos nos pontos determinados nas etapas 2, 3 e 4 e, em seguida, clicamos em “Concluído” no quadro de informações do canto direito. Antes disso, aumentamos a escala para ter mais detalhes (basta mover a roleta do mouse para cima ou clicar no botão “+” no canto direito inferior). Assim, o *Google Earth* fornece a distância entre Curitiba e Uruma – Figura 13.

Figura 13: Verificando a distância entre Curitiba e Uruma.



Fonte: Google (2021).

A distância entre as duas cidades é representada por uma linha – Figura 14, que permanecerá visível até clicarmos em “Iniciar nova” ou fechar o quadro do canto direito.

Figura 14: Linha (geodésica) que representa a distância entre Curitiba e Uruma.

Fonte: Google (2021).

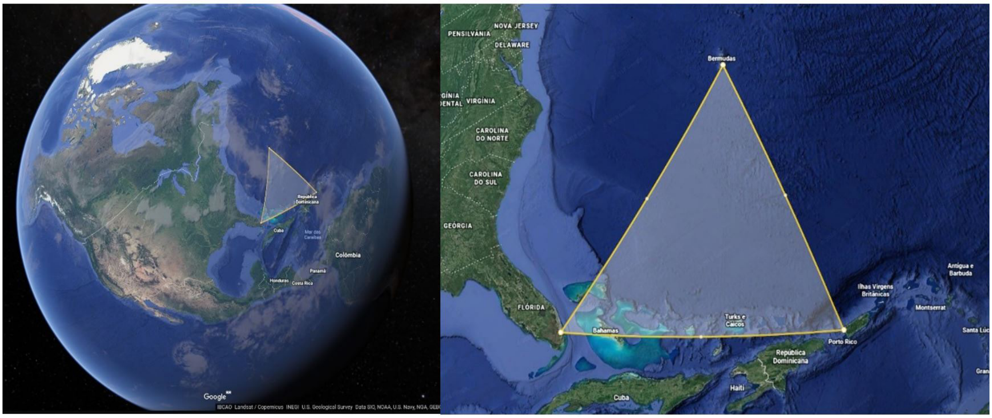
3.2 ATIVIDADE 2: A ÁREA DO TRIÂNGULO DAS BERMUDAS

Nesta atividade, empregamos as coordenadas esféricas para calcular a distância entre as três cidades que definem o triângulo das Bermudas e a área do triângulo esférico que tem por vértices essas três cidades. Para tanto, os estudantes devem ser capazes de calcular o comprimento de uma geodésica e a área de um triângulo esférico.

O triângulo das Bermudas, ilustrado na Figura 15(a), talvez seja um dos assuntos mais icônicos em termos de eventos desastrosos para a aviação e a navegação. Isto porque diversos aviões, barcos e navios desapareceram misteriosamente ao trafegarem por sua área, determinada por Fort Lauderdale (EUA), San Juan (Porto Rico) e Hamilton (Bermudas), como ilustra a Figura 15(b).

Há explicações científicas para os desaparecimentos, tais como aquelas baseadas no campo magnético da região, eventos climáticos como terremotos e redemoinhos, correntes marítimas etc. Mas também há explicações sensacionalistas, baseadas em conspirações, e até mesmo sobrenaturais. Os mistérios do triângulo das Bermudas passaram a ser popularmente conhecidos através do livro *Invisible horizons: true mysteries of the sea*, do escritor sensacionalista americano Vincent Gaddis (1913-1997).

Figura 15: Triângulo das Bermudas: (a) superfície; (b) vértices.



(a) (b)

Fonte: Google (2021).

Assim, utilizando o Teorema 1, $\rho = 6371\ km$ como medida do raio médio da Terra e os dados da Tabela 2, os estudantes transformam as coordenadas geográficas das cidades de Fort Lauderdale, San Juan e Hamilton em coordenadas esféricas; logo após, empregando o Teorema 3, calculam a distância, em km, entre cada uma das três cidades; em seguida, empregando os Teoremas 6 e 7, determinam as medidas dos ângulos internos do triângulo esférico cujos vértices são as três cidades. Para finalizar, usando o Teorema 4, os estudantes calculam a área, em km^2, do triângulo das Bermudas e comparam essa medida com a fornecida pelo *Google Earth*.

Tabela 2: Coordenadas geográficas do triângulo das Bermudas.

Local	Latitude	Colatitude ψ	Longitude φ
Fort Lauderdale	26°08′00″N	63°52′00″N	80°08′00″W
San Juan	18°28′00″N	71°32′00″N	66°04′00″W
Hamilton	32°18′00″N	57°42′00″N	64°47′00″W

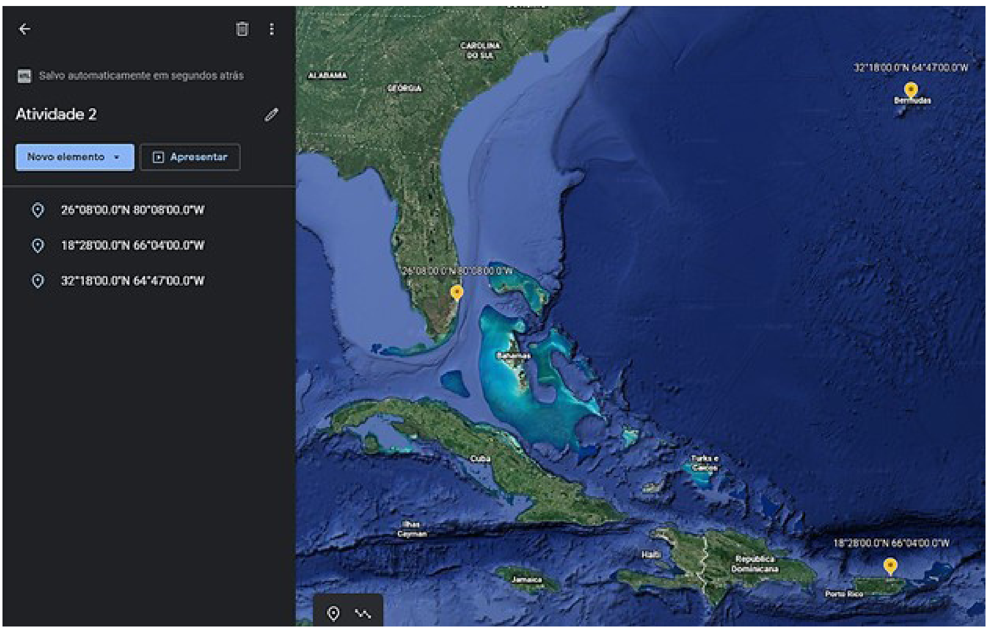
Fonte: Google (2021).

Mencionamos a seguir as etapas da atividade no *Google Earth*.

Etapas

1. Criamos um novo projeto no *Google Earth* e localizamos os três vértices (pontos) do triângulo das Bermudas (etapas 1 a 3 da Atividade 1) – Figura 16.

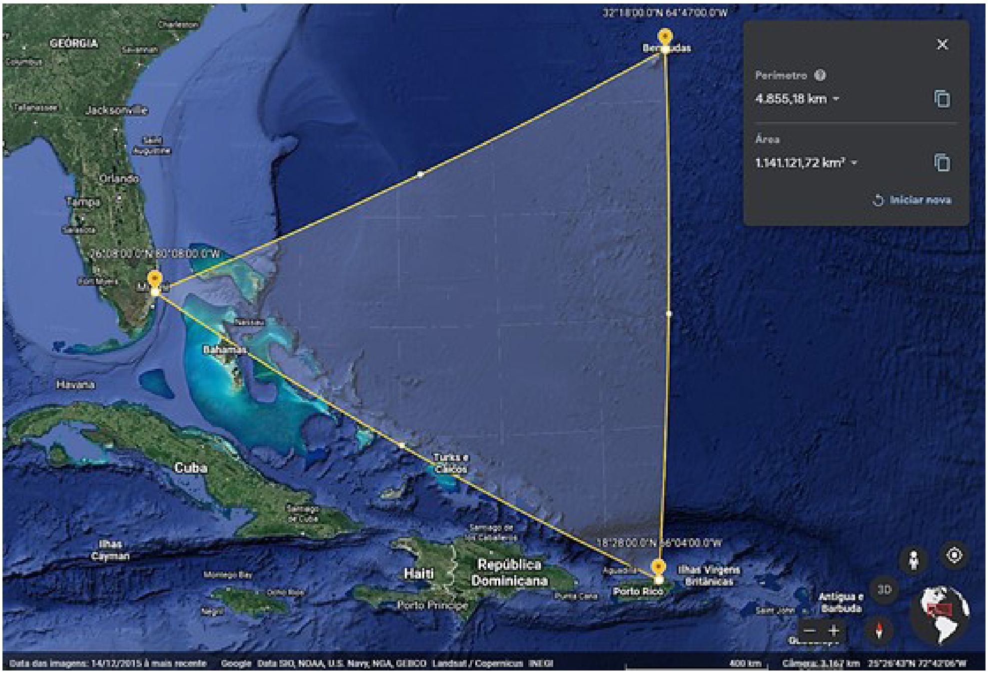
Figura 16: Localizando o triângulo das Bermudas.



Fonte: Google (2021).

2. Com a ferramenta "Medir distância e área", unimos os três pontos até formar o triângulo. O *Google Earth* fornece as medidas do perímetro e da área do triângulo formado – Figura 17.

Figura 17: Calculando a área do triângulo das Bermudas.



Fonte: Google (2021).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, discorremos sobre a geometria esférica, apresentando relações geométricas importantes, tais como o comprimento de uma geodésica, a soma dos ângulos internos e a área de um triângulo esférico. Propomos ainda duas atividades para explorar conceitos e propriedades da geometria esférica com o *Google Earth* no curso de Licenciatura em Matemática.

As principais dificuldades enfrentadas na elaboração deste trabalho foram a escassa bibliografia em Língua Portuguesa sobre geometria esférica e a definição do software a ser empregado na construção das imagens tridimensionais da esfera, seus elementos e seções. Quanto à primeira, nossa referência básica foi *Geometry* (BRANNAN *et al.*, 2012). Contudo, os autores desta obra demonstram resultados de geometria esférica na esfera unitária, ou seja, na esfera de raio $R = 1$. Assim, demonstrar esses resultados em uma esfera de raio $R = \rho$, com $\rho > 0$, revelou-se um desafio interessante. Quanto à segunda, optamos pelo CorelDRAW (COREL, 2018), que pode ser substituído por um aplicativo de geometria dinâmica gratuito, como o GeoGebra 3D (GEOGEBRA3D, 2021).

Esperamos que este trabalho seja útil aos estudantes dos cursos de Licenciatura em Matemática, particularmente da UTFPR, Campus Curitiba, e também aos professores de matemática da Educação Básica. Quanto a estes, almejamos que o trabalho inspire o emprego do *Google Earth* no planejamento/desenvolvimento de atividades introdutórias ao estudo de geometria esférica, assim como em atividades interdisciplinares envolvendo matemática e geografia.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, W. G. B. Matemática, cartografia e navegação: uma história que deu certo. **Revista do Professor de Matemática**, n. 96, p. 56-62, 2018.

ALVES, S. **A geometria do globo terrestre**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

BRANNAN, D. A.; ESPLEN, M. F.; GRAY, J. J. **Geometry**. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC/SEB/CNE, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 08 out. 2021.

BURTON, D. M. **History of mathematics**. 7th ed. New York: McGraw-Hill, 2011.

COREL. **CorelDRAW**. 2021. Disponível em: https://www.coreldraw.com/br. Acesso em: 08 out. 2021.

EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Unesp, 2009.

EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. 1. ed. Campinas: Unicamp, 2004.

DORIA, C. M. **Geometrias**: Euclidiana, esférica e hiperbólica. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019.

FILHO, A. E. P. da S.; FERREIRA, F. D.; BRAGA, F. V. Revisitando a geometria esférica. **Revista do Professor de Matemática**, n. 95, p. 42-45, 2018.

GEOGEBRA3D. **GeoGebra 3D calculator**. 2021. Disponível em: https://www.geogebra.org/3d. Acesso em: 08 out. 2021.

FURTHESTCITY. **Farthest point from Curitiba, Brazil**. 2021. Disponível em: http://furthestcity.com/city.php?ID=CURITIBA_BRAZIL. Acesso em: 08 out. 2021.

GOOGLE. **Google Earth**. 2021. Disponível em: https://earth.google.com/web. Acesso em: 08 out. 2021.

JAHN, A. P.; BONGIOVANNI, V. Distância entre dois pontos na geometria esférica. **Revista do Professor de Matemática**, n. 91, p. 45-51, 2016.

MOTTA, G. P. **Geometrias não Euclidianas no plano e geometria esférica**. 2018. Monografia de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

NÓS, R. L.; SILVA, V. M. R. da. Compondo/decompondo poliedros convexos com o GeoGebra 3D. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 7, n. 1, p. 010364-1 – 010364-7, 2020.

NÓS, R. L.; MOTTA, G. P. Geometria esférica na Licenciatura em Matemática. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 8, n. 1, p. 010420-1 – 010420-7, 2021.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática**. Curitiba: Governo do Paraná/SEED/DEB, 2008. Disponível em: www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em: 08 out. 2021.

ROONEY, A. **A história da matemática**: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books, 2012.

SILVA, V. M. R. da S.; NÓS, R. L. **Calculando o volume de poliedros convexos**. Curitiba: CRV, 2018.

WIKIMEDIACOMMONS. **Spherical triangle**. 2020. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_triangle_3d.png. Acesso em: 08 out. 2021.

WIKIPEDIA. **Uruma**. 2021. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Uruma. Acesso em: 08 out. 2021.

WOLFSON, R. **Simplesmente Einstein**: a relatividade desmistificada. São Paulo: Globo, 2005.

SOBRE A ORGANIZADORA

Paula Arcoverde Cavalcanti - Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professora Titular Pleno da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), atuando na graduação em Licenciatura em Geografia, Licenciatura em Letras e na Pós-Graduação em Geografia e Desenvolvimento Territorial. Integra Grupo de Pesquisa - CNPq - Análise de Políticas de Inovação (GAPI), vinculado ao Departamento de Política Científica e Tecnológica da UNICAMP. Atuou como Coordenadora do Curso de Pedagogia (Campus XIII-UNEB), Coordenadora da Pós-Graduação Mestrado em Cultura, Memoria e Desenvolvimento Regional e Coordenadora do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). Tem atuado profissionalmente na área Gestão Pública, Análise e Avaliação de Políticas Públicas e de Educação. Autora dos livros "Análise de políticas públicas: um estudo do Estado em ação" e "Gestão Estratégica Pública" e organizadora do livro Educação: Teorias, Métodos e Perspectivas, Vol. I, II, III e IV.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

L

M

O

P

R

S

T