

José Luis Escamilla Reyes
(organizador)

EDUCAÇÃO
E
ENSINO
DE
CIÊNCIAS EXATAS
E
NATURAIS

 EDITORA
ARTEMIS
2021

José Luis Escamilla Reyes
(organizador)

EDUCAÇÃO
E
ENSINO
DE
CIÊNCIAS EXATAS
E
NATURAIS

 EDITORA
ARTEMIS
2021

2021 by Editora Artemis
Copyright © Editora Artemis
Copyright do Texto © 2021 Os autores
Copyright da Edição © 2021 Editora Artemis



O conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição Creative Commons Atribuição-Não-Comercial NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0). Direitos para esta edição cedidos à Editora Artemis pelos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento, desde que sejam atribuídos créditos aos autores, e sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

A responsabilidade pelo conteúdo dos artigos e seus dados, em sua forma, correção e confiabilidade é exclusiva dos autores. A Editora Artemis, em seu compromisso de manter e aperfeiçoar a qualidade e confiabilidade dos trabalhos que publica, conduz a avaliação cega pelos pares de todos manuscritos publicados, com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

Editora Chefe	Prof ^ª Dr ^ª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora Executiva	M. ^ª Viviane Carvalho Mocellin
Direção de Arte	M. ^ª Bruna Bejarano
Diagramação	Elisangela Abreu
Organizador	Prof. Dr. José Luis Escamilla Reyes
Imagem da Capa	ekaart/123RF
Bibliotecário	Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Conselho Editorial

Prof.^ª Dr.^ª Ada Esther Portero Ricol, *Universidad Tecnológica de La Habana “José Antonio Echeverría”, Cuba*
Prof. Dr. Adalberto de Paula Paranhos, *Universidade Federal de Uberlândia*
Prof.^ª Dr.^ª Amanda Ramalho de Freitas Brito, *Universidade Federal da Paraíba*
Prof.^ª Dr.^ª Ana Clara Monteverde, *Universidad de Buenos Aires, Argentina*
Prof. Dr. Ángel Mujica Sánchez, *Universidad Nacional del Altiplano, Peru*
Prof.^ª Dr.^ª Angela Ester Mallmann Centenaro, *Universidade do Estado de Mato Grosso*
Prof.^ª Dr.^ª Begoña Blandón González, *Universidad de Sevilla, Espanha*
Prof.^ª Dr.^ª Carmen Pimentel, *Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro*
Prof.^ª Dr.^ª Catarina Castro, *Universidade Nova de Lisboa, Portugal*
Prof.^ª Dr.^ª Cláudia Padovesi Fonseca, *Universidade de Brasília-DF*
Prof.^ª Dr.^ª Cláudia Neves, *Universidade Aberta de Portugal*
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos, *Universidade Federal da Grande Dourados*
Prof. Dr. David García-Martul, *Universidad Rey Juan Carlos de Madrid, Espanha*
Prof.^ª Dr.^ª Deuzimar Costa Serra, *Universidade Estadual do Maranhão*
Prof.^ª Dr.^ª Eduarda Maria Rocha Teles de Castro Coelho, *Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Portugal*
Prof. Dr. Eduardo Eugênio Spers, *Universidade de São Paulo*
Prof. Dr. Eloi Martins Senhoras, *Universidade Federal de Roraima*
Prof.^ª Dr.^ª Elvira Laura Hernández Carballido, *Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México*
Prof.^ª Dr.^ª Emilias Darlene Carmen Lebus, *Universidad Nacional del Nordeste/ Universidad Tecnológica Nacional, Argentina*



Prof.ª Dr.ª Erla Mariela Morales Morgado, *Universidad de Salamanca*, Espanha
Prof. Dr. Ernesto Cristina, *Universidad de la República*, Uruguay
Prof. Dr. Ernesto Ramírez-Briones, *Universidad de Guadalajara*, México
Prof. Dr. Gabriel Díaz Cobos, *Universitat de Barcelona*, Espanha
Prof. Dr. Geoffroy Roger Pointer Malpass, *Universidade Federal do Triângulo Mineiro*
Prof.ª Dr.ª Gladys Esther Leoz, *Universidad Nacional de San Luis*, Argentina
Prof.ª Dr.ª Glória Beatriz Álvarez, *Universidad de Buenos Aires*, Argentina
Prof. Dr. Gonçalo Poeta Fernandes, *Instituto Politécnico da Guarda*, Portugal
Prof. Dr. Gustavo Adolfo Juarez, *Universidad Nacional de Catamarca*, Argentina
Prof.ª Dr.ª Iara Lúcia Tescarollo Dias, *Universidade São Francisco*
Prof.ª Dr.ª Isabel del Rosario Chiyon Carrasco, *Universidad de Piura*, Peru
Prof.ª Dr.ª Isabel Yohena, *Universidad de Buenos Aires*, Argentina
Prof. Dr. Ivan Amaro, *Universidade do Estado do Rio de Janeiro*
Prof. Dr. Iván Ramon Sánchez Soto, *Universidad del Bío-Bío*, Chile
Prof.ª Dr.ª Ivânia Maria Carneiro Vieira, *Universidade Federal do Amazonas*
Prof. Me. Javier Antonio Alborno, *University of Miami and Miami Dade College*, USA
Prof. Dr. Jesús Montero Martínez, *Universidad de Castilla - La Mancha*, Espanha
Prof. Dr. João Manuel Pereira Ramalho Serrano, *Universidade de Évora*, Portugal
Prof. Dr. Joaquim Júlio Almeida Júnior, *UniFIMES - Centro Universitário de Mineiros*
Prof. Dr. Juan Carlos Mosquera Feijoo, *Universidad Politécnica de Madrid*, Espanha
Prof. Dr. Juan Diego Parra Valencia, *Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín*, Colômbia
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro, *Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro*
Prof. Dr. Leinig Antonio Perazolli, *Universidade Estadual Paulista*
Prof.ª Dr.ª Livia do Carmo, *Universidade Federal de Goiás*
Prof.ª Dr.ª Luciane Spanhol Bordignon, *Universidade de Passo Fundo*
Prof. Dr. Luis Vicente Amador Muñoz, *Universidad Pablo de Olavide*, Espanha
Prof.ª Dr.ª Macarena Esteban Ibáñez, *Universidad Pablo de Olavide*, Espanha
Prof. Dr. Manuel Ramiro Rodríguez, *Universidad Santiago de Compostela*, Espanha
Prof. Dr. Marcos Augusto de Lima Nobre, *Universidade Estadual Paulista*
Prof. Dr. Marcos Vinicius Meiado, *Universidade Federal de Sergipe*
Prof.ª Dr.ª Mar Garrido Román, *Universidad de Granada*, Espanha
Prof.ª Dr.ª Margarida Márcia Fernandes Lima, *Universidade Federal de Ouro Preto*
Prof.ª Dr.ª Maria Aparecida José de Oliveira, *Universidade Federal da Bahia*
Prof.ª Dr.ª Maria do Céu Caetano, *Universidade Nova de Lisboa*, Portugal
Prof.ª Dr.ª Maria do Socorro Saraiva Pinheiro, *Universidade Federal do Maranhão*
Prof.ª Dr.ª Maria Lúcia Pato, *Instituto Politécnico de Viseu*, Portugal
Prof.ª Dr.ª Maritza González Moreno, *Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría"*, Cuba
Prof.ª Dr.ª Mauriceia Silva de Paula Vieira, *Universidade Federal de Lavras*
Prof.ª Dr.ª Odara Horta Boscolo, *Universidade Federal Fluminense*



Prof.ª Dr.ª Patrícia Vasconcelos Almeida, Universidade Federal de Lavras
Prof.ª Dr.ª Paula Arcoverde Cavalcanti, Universidade do Estado da Bahia
Prof. Dr. Rodrigo Marques de Almeida Guerra, Universidade Federal do Pará
Prof. Dr. Saulo Cerqueira de Aguiar Soares, Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Sergio Bitencourt Araújo Barros, Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Sérgio Luiz do Amaral Moretti, Universidade Federal de Uberlândia
Prof.ª Dr.ª Silvia Inés del Valle Navarro, *Universidad Nacional de Catamarca, Argentina*
Prof.ª Dr.ª Teresa Cardoso, Universidade Aberta de Portugal
Prof.ª Dr.ª Teresa Monteiro Seixas, Universidade do Porto, Portugal
Prof. Dr. Turpo Gebera Osbaldo Washington, *Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, Peru*
Prof. Dr. Valter Machado da Fonseca, Universidade Federal de Viçosa
Prof.ª Dr.ª Vanessa Bordin Viera, Universidade Federal de Campina Grande
Prof.ª Dr.ª Vera Lúcia Vasilévski dos Santos Araújo, Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Wilson Noé Garcés Aguilar, *Corporación Universitaria Autónoma del Cauca, Colômbia*

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E24 Educação e ensino de ciências exatas e naturais [livro eletrônico] /
Organizador José Luis Escamilla Reyes. – Curitiba, PR: Artemis,
2021.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Edição bilíngue

ISBN 978-65-87396-49-1

DOI 10.37572/EdArt_171221491

1. Educação. 2. Prática de ensino. 3. Professores – Formação.
I. Reyes, José Luis Escamilla.

CDD 371.72

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

PRÓLOGO

El libro **Educação e Ensino de Ciências Exatas e Naturais** presenta los resultados de varios proyectos de investigación en innovación educativa relacionados con la enseñanza de las ciencias y la ingeniería, un tema apasionante para los que estamos involucrados en el día a día en las aulas frente a nuestros alumnos.

En este trabajo, la enseñanza en la ingeniería y ciencias se aborda desde muy diversas perspectivas, todas ellas muy relevantes. Por ejemplo, en varios artículos de este libro se discuten los procesos de evaluación, tanto dentro de los cursos de la disciplina como de los programas de las carreras asociadas a estas áreas. Asimismo, en otros trabajos se propone como una prioridad el incorporar una perspectiva de género e inclusión para facilitar el acceso a estas carreras científicas de sectores de la población que tradicionalmente han sido marginados como las mujeres y las etnias indígenas. Por otro lado, el enfoque de la modelación matemática en los cursos de ingeniería es discutido y su implementación en el aula presentada para evidenciar sus ventajas con respecto a las aproximaciones tradicionalmente expuestas en los cursos convencionales en donde los problemas matemáticos son artificiales, sin un contexto específico y en los cuales no hay necesidad de enunciar y estructurar el problema a partir de una situación real.

Por supuesto, hago la invitación al lector para que disfrute la lectura de estos artículos de innovación educativa y, más importante aún, si es un docente en activo, que implemente alguna o varias de las estrategias y metodologías aquí expuestas para enriquecer su práctica docente y, de esta manera, contribuir en la validación de la pertinencia y relevancia de estos enfoques educativos. Finalmente, bienvenida la retroalimentación y los comentarios propositivos ya que lo más importante es garantizar que nuestros alumnos alcancen un aprendizaje significativo que les permita enfrentar con éxito los problemas tanto en su práctica profesional como en su vida cotidiana.

Dr. José Luis Escamilla Reyes

SUMÁRIO

PROCESOS DE EVALUACIÓN EN LOS PROGRAMAS DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

CAPÍTULO 1..... 1

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN FORMATIVA: UNA FORMA DE PROMOVER EL APRENDIZAJE AUTÓNOMO EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Olga Lucía Duarte Bolívar
Graciela Morantes Moncada
Luz Ángela Flórez Olarte

 https://doi.org/10.37572/EdArt_1712214911

CAPÍTULO 2..... 12

COMPETÊNCIAS MÍNIMAS DE ESTUDANTES DE MEDICINA PARA OBTENÇÃO DE VIAS AÉREAS DEFINITIVA EM DIFERENTES SEMESTRES DO CURSO

Kenya de Sales Flaminio
Milena Coelho Fernandes Caldato

 https://doi.org/10.37572/EdArt_1712214912

CAPÍTULO 3.....32

ESTRATEGIAS EVALUATIVAS EN USO PARA EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO Y OCTAVO AÑO BÁSICO

Francisca Macarena Cartes Matus
Paulina Edith Cartes Gómez

 https://doi.org/10.37572/EdArt_1712214913

CAPÍTULO 4.....42

O ESTADO DA EDUCAÇÃO CIENTÍFICA NA AMÉRICA LATINA

Williams Orlando Tapia Chavez

 https://doi.org/10.37572/EdArt_1712214914

NUEVOS ENFOQUES Y APROXIMACIONES EN LA EDUCACIÓN CIENTÍFICA

CAPÍTULO 5..... 63

TOMA DE DECISIONES, DESDE LOS ODS, MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA CLASE DE CIENCIAS

Ana María Gómez Prado
Yolanda Ladino Ospina

 https://doi.org/10.37572/EdArt_1712214915

CAPÍTULO 6.....74

TRABAJO EN EQUIPO Y POR PROYECTOS BAJO LOS CONCEPTOS DEL CEREBRO TRIÁDICO PARA EL LOGRO DE COMPETENCIAS EN UNA ASIGNATURA DE CIENCIAS: EL TRICEREBRAR

Margarita Patiño Jaramillo

John Jairo García Mora

 https://doi.org/10.37572/EdArt_1712214916

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LOS CURSOS DE INGENIERÍA: ENFRENTANDO A LOS ALUMNOS CON PROBLEMÁTICAS REALES

CAPÍTULO 7.....87

¿CÓMO PRESENTAN PROFESORES LATINOAMERICANOS LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL AULA? UN ESTUDIO DE CASOS BASADO EN DOS EVENTOS INTERNACIONALES

Elisabeth Ramos-Rodríguez

Astrid Morales Soto

 https://doi.org/10.37572/EdArt_1712214917

CAPÍTULO 8.....97

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL CURSO DE ECUACIONES DIFERENCIALES A TRAVÉS DE PROBLEMÁTICAS REALES

José Luis Escamilla Reyes

 https://doi.org/10.37572/EdArt_1712214918

PERSPECTIVA DE GÉNERO E INCLUSIÓN EN LAS CARRERAS DE INGENIERÍA

CAPÍTULO 9..... 106

POLIEDROS QUE VUELAN

Roberto Antonio Salvador

 https://doi.org/10.37572/EdArt_1712214919

CAPÍTULO 10.....112

UNA MIRADA DE GÉNERO AL INGRESO FEMENINO EN CARRERAS DE TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

Jaime Espinoza Oyarzún

 https://doi.org/10.37572/EdArt_17122149110

LA INCORPORACIÓN DE HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

CAPÍTULO 11..... 120

EMPREGANDO O GEOGEBRA 3D NA DE (COMPOSIÇÃO) DE POLIEDROS CONVEXOS PARA O CÁLCULO DO VOLUME

Victoria Mazotti Rodrigues da Silva

Rudimar Luiz Nós

 https://doi.org/10.37572/EdArt_17122149111

CAPÍTULO 12 131

ENSINO DE CÁLCULO COM O APOIO DE BLOG E DO GEOGEBRA

Ailton Durigon

Vilma Gisele Karsburg

Alan Lanceloth Rodrigues Silva

Lucas Santos Savi Mondo

 https://doi.org/10.37572/EdArt_17122149112

SOBRE O ORGANIZADOR.....139

ÍNDICE REMISSIVO 140

CAPÍTULO 8

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL CURSO DE ECUACIONES DIFERENCIALES A TRAVÉS DE PROBLEMÁTICAS REALES¹

Data de submissão: 10/09/2021

Data de aceite: 30/09/2021

Dr. José Luis Escamilla Reyes

Tecnológico de Monterrey
Campus Ciudad de México
Departamento de Ciencias
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Ciudad de México, México
<https://orcid.org/0000-0001-5069-0757>

RESUMEN: En este trabajo, se presenta un proceso de tipo iterativo con el fin de modelar sistemas dinámicos simples por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). A través de dicho proceso, por un lado, es posible plantear modelos cada vez más sofisticados que permiten describir de mejor manera el comportamiento de estos sistemas dinámicos; por otro lado, el estructurar este proceso como una secuencia de aprendizaje permite que los alumnos perciban claramente la necesidad de incorporar nuevos métodos analíticos de solución para los modelos presentados así como el reconocer cuando es necesaria la incorporación de los métodos numéricos para resolver las EDOs que modelan los fenómenos. A diferencia

¹ Una versión preliminar del trabajo se presentó en el Congreso Internacional de Innovación Educativa del Tecnológico de Monterrey (CIIE 2018), en la ciudad de Monterrey, Nuevo León, México.

de la presentación de estos temas en un curso típico de ecuaciones diferenciales ordinarias, en nuestra aproximación se vuelve crucial la validación de estos modelos como una parte integral del proceso de aprendizaje puesto que los modelos matemáticos estudiados tienen un contexto real. Es evidente que, a través de estas secuencias de aprendizaje, el involucramiento y la motivación de los estudiantes es digno de resaltar, como lo muestran las encuestas de percepción realizadas.

PALABRAS CLAVE: Ecuaciones Diferenciales ordinarias. Modelación matemática. Aprendizaje activo. Secuencias de aprendizaje.

MATHEMATICAL MODELLING IN A DIFFERENTIAL EQUATIONS COURSE THROUGH REAL PROBLEMS

ABSTRACT: In this paper, we present an iterative process in order to model simple dynamical systems with ordinary differential equations (ODEs). On one hand, following such a process it is possible to establish more sophisticated and accurate models useful for describe in a better way the behaviour of these dynamical systems; On the other hand, the structure of this process as a learning sequence allows that students clearly see the need of incorporate new analytic methods to solve the mathematical models as well as the convenience of getting numerical methods to obtain approximate solutions to the ODEs modelling these phenomena. In contrast to

the usual lecturing of these subjects in a typical ordinary differential equations course, in our approach, validation of the models is a crucial stage and must be considered as an integral part of the learning process given that these models have a real context. As a result, the students' engagement and motivation when they get involved in these learning sequences is remarkable, as perception surveys show.

KEYWORDS: Ordinary differential equations. Mathematical modelling. Active. Learning sequences.

1 INTRODUCCIÓN

En diversas circunstancias, surge la necesidad de describir a los sistemas dinámicos por medio de modelos matemáticos que nos permitan establecer el comportamiento futuro del sistema en base al conocimiento del estado presente de dicho sistema. Por ejemplo, fenómenos tales como el enfriamiento de una bebida caliente, el decaimiento de una sustancia radiactiva, el vaciado de un tanque lleno de agua o el crecimiento poblacional pueden estudiarse mediante la rapidez de variación de alguna cantidad respecto del tiempo. Estos son modelos matemáticos de primer orden porque involucran la primera derivada respecto del tiempo de la variable dependiente. Igualmente, los modelos de segundo orden están relacionados con las vibraciones mecánicas de un sistema o con circuitos eléctricos del tipo RLC, por ejemplo, en los cuales se requiere obtener la posición, velocidad y aceleración del sistema como función del tiempo o la carga eléctrica y la corriente que fluye en un circuito eléctrico.

Usualmente, en los cursos típicos de esta asignatura, las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) están planteadas, son ejercicios matemáticos sin un contexto real por lo que el problema para el alumno se reduce a aplicar un método matemático y resolverlas (Zill, 2013). Dado que, en general, las EDOs no describen un fenómeno físico, químico o biológico, la validación de las soluciones es omitida y raramente se discuten las características cualitativas y cuantitativas de estas soluciones. Más aún, las aplicaciones discutidas en la mayoría de los libros de texto utilizados en esta asignatura son muy limitadas, artificiales y, generalmente, se le proporciona al estudiante el modelo matemático que describe el fenómeno para que lo resuelva analíticamente.

Como consecuencia, no se desarrolla en los estudiantes la habilidad de plantear modelos matemáticos para describir fenómenos de la naturaleza. Finalmente, las soluciones analíticas de las EDOs no se validan para verificar su viabilidad o pertinencia, con lo cual el proceso de solución queda trunco, perdiéndose la oportunidad de analizar las soluciones y su factibilidad en entornos más realistas como aquellos a los que se enfrentarán los futuros ingenieros en su práctica profesional.

2 DESARROLLO

Como es sabido (Aprendizaje Activo, 2021), “el Aprendizaje Activo es una estrategia de enseñanza – aprendizaje cuyo diseño e implementación se centra en el alumno al promover su participación y reflexión continua a través de actividades que promueven el diálogo, la colaboración, el desarrollo y construcción de conocimientos, así como habilidades y actitudes. Las actividades con Aprendizaje Activo se caracterizan por ser motivadoras y retadoras, orientadas a profundizar en el conocimiento; también, por desarrollar en los alumnos las habilidades de búsqueda, análisis y síntesis de la información, además de promover una adaptación activa a la solución de problemas...”. Estas secuencias de aprendizaje “se caracterizan por ser actividades muy bien estructuradas y retadoras, con la suficiente flexibilidad para adaptarlas a las características del grupo de aprendizaje e incluso a nivel individual. Se organizan para desarrollarse tanto en espacios presenciales como virtuales, o bien en combinación de los mismos. Implican trabajo individual y grupal donde la información es compartida por parte de profesor y alumnos”.

De acuerdo con las citas anteriores sobre el Aprendizaje Activo, consideramos que, en beneficio del aprendizaje de los estudiantes, es imperativo reconsiderar la manera en la cual se imparte el curso de Ecuaciones Diferenciales. En nuestro enfoque, se invierte la secuencia de presentación de los temas por lo que, en lugar de presentar los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer o segundo orden, se discuten varios problemas aplicados donde surgen naturalmente los modelos matemáticos expresados mediante *EDOs* de primer y segundo orden. Siguiendo la metodología iterativa de modelación de sistemas, que se presenta en la siguiente sección, a partir de un modelo simple, se proponen modelos más sofisticados para mejorar la descripción de fenómenos físicos, biológicos o económicos.

Por ejemplo, se plantea el modelo matemático de la caída vertical de una partícula en un medio sin fricción; se resuelve el modelo para obtener la velocidad y la posición de la partícula aplicando los métodos de solución convencionales. Una vez completada esta etapa, se procede a sofisticar el modelo para tomar en cuenta una fuerza de fricción o arrastre sobre un objeto en caída vertical introduciendo una fuerza proporcional a la velocidad de la partícula y se resuelve el modelo de forma analítica. Finalmente, se introduce un término de arrastre proporcional al cuadrado de la magnitud de la velocidad y se resuelve el modelo para contrastar los resultados obtenidos en esta etapa y la previa contra datos experimentales como, por ejemplo, la caída de un objeto en un medio viscoso o el salto desde la Estratósfera de Félix Baumgartner (Baumgartner, 2021).

Otro posible problema con un contexto real y en el que se puede estructurar una secuencia de aprendizaje atractiva lo constituye el problema del crecimiento poblacional

en donde se parte del modelo simple Malthusiano para, posteriormente, modificarlo de modo tal que se tomen en cuenta características más realistas como enfermedades, disponibilidad de alimentos, pandemias, y otras con el fin de introducir en la discusión los modelos de tipo logístico que describen con mayor precisión el crecimiento de poblaciones, con la ventaja que la solución obtenida a partir de estos modelos logísticos puede contrastarse con datos provenientes de censos poblacionales y así cerrar el ciclo de la solución de los modelos matemáticos y la validación de esta con datos reales.

2.1 EL PROCESO ITERATIVO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA DE SISTEMAS

Es importante señalar que, para modelar un fenómeno físico, químico, biológico o económico, no hay un procedimiento único. Hay, sí, una serie de pasos que conforman un proceso iterativo en el cual el modelo se va depurando de forma tal que describa el fenómeno apropiadamente. Esta validación se hará generalmente por medio de datos experimentales o usando bancos de datos provenientes de censos poblacionales, censos económicos o similares. A continuación, se describe en detalle el proceso para modelar sistemas dinámicos en varios campos del conocimiento.

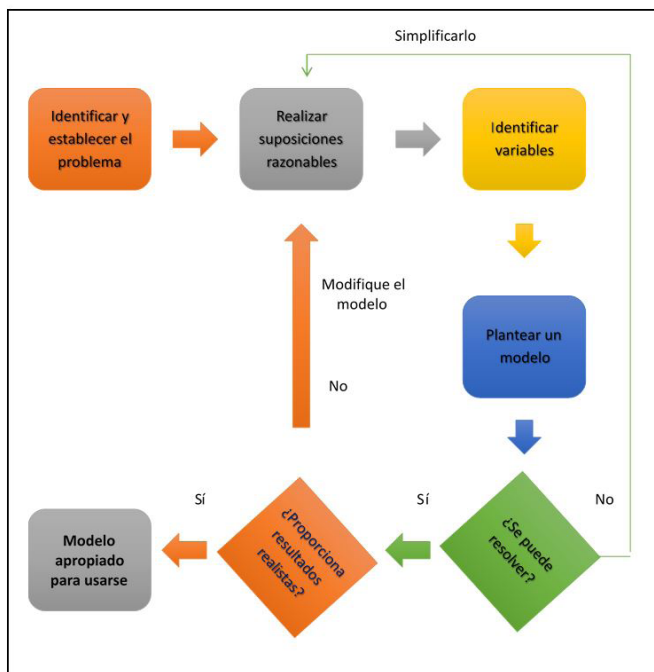
Como parte del proceso de modelación matemática de sistemas, las siguientes constituyen líneas generales a seguir para plantear y depurar el modelo matemático:

- 1) **Identificar y establecer el problema:** Identificar y expresar claramente cuál es el problema que se desea resolver estableciendo una narrativa lo más directa y simple del problema en cuestión.
- 2) **Hacer suposiciones razonables:** Dada la complejidad de los problemas reales, es conveniente establecer una serie de suposiciones razonables que nos permitan resolver el problema, pero evitando en todo momento sobresimplificarlo.
- 3) **Identificar y clasificar las variables y parámetros del problema:** Una vez establecidas las suposiciones del punto anterior, hacer una diferenciación clara entre los parámetros y las variables del problema. Por ejemplo, en un problema de caída libre, la velocidad del objeto es una variable ya que cambia con el tiempo, mientras que la aceleración de la gravedad puede considerarse un parámetro constante si la caída no se realiza desde una gran altura respecto a la superficie terrestre. Por otro lado, en un problema de competencia en un medio ambiente dado, la población de una cierta especie se modifica con el tiempo, mientras que el número de especímenes al inicio es un parámetro constante.

- 4) **Establecer conexiones entre las distintas variables y parámetros del problema:** De entrada, en un problema real tendremos una gran cantidad de variables y parámetros, así que lo mejor será establecer relaciones y proporcionalidades razonables entre una o más variables y los correspondientes parámetros del problema.
- 5) **Plantear un modelo matemático para el problema:** Tomando en consideración los puntos 1 al 4, plantear un modelo matemático para describir la evolución en el tiempo de una variable del sistema dinámico. Este modelo será una ecuación diferencial ordinaria si presenta la evolución de una variable dependiente en función una variable independiente. Si la variable dependiente es función de más variables, la ecuación diferencial asociada será parcial.
- 6) **Resolver el modelo:** Esto puede lograrse de varias maneras: Ya sea expresando la ecuación diferencial en una forma para la cual ya exista una solución en la literatura; otra, aplicando los métodos usuales de solución de las ecuaciones diferenciales de primer orden para obtener una solución analítica; finalmente, aplicando métodos numéricos para obtener una solución con el grado de aproximación deseado. Si el modelo no puede resolverse dada su complejidad, regresar al paso 2 y considerar algunas variables como constantes para plantear un modelo más simple.
- 7) **Validar la solución del modelo:** Esto quiere decir ¿tiene sentido la solución?, ¿describe adecuadamente el comportamiento del sistema?, ¿se aproxima al comportamiento real del sistema considerando datos reales? Si las respuestas a estas preguntas son afirmativas, el problema ha sido resuelto satisfactoriamente.
- 8) **Si los resultados son insatisfactorios, regresar al paso 2) y modificar el modelo:** Probablemente, algunos de los parámetros son en realidad variables por lo que el modelo fue artificialmente sobre-simplificado. Establecer relaciones o proporcionalidades entre estas nuevas variables y las ya establecidas con anterioridad.

Estos pasos se presentan de manera simplificada en la Figura 1 mediante un diagrama de flujo que contiene todas las etapas asociadas con el planteamiento y depuración de modelos matemáticos. Es importante tener en mente este proceso iterativo porque, dependiendo de la complejidad del fenómeno a describir, puede ser necesario aplicar varias veces el proceso.

Figura 1: Pasos para la construcción de un modelo matemático mediante un proceso iterativo.



2.2 IMPLEMENTACIÓN EN EL AULA

Para la implementación en el aula, los modelos se presentan en clase comenzando con el más sencillo de ellos. Se trabaja en equipos de cuatro personas y se pide a cada equipo establecer un plan de acción para realizar la investigación inicial y plantear un proceso de solución de la problemática planteada. En esta etapa, es crucial el acompañamiento del profesor para guiar a los alumnos en el proceso de investigación sobre el contexto del problema y los posibles métodos de solución, analíticos y/o numéricos, del modelo planteado.

De acuerdo con la investigación realizada, se elige el método de solución del modelo matemático propuesto. Entonces, se resuelve el modelo y sus resultados se validan, en la medida de lo posible, contrastando contra datos reales. Una vez resuelto el modelo inicial, se hacen sofisticaciones al mismo para incorporar elementos no considerados en el planteamiento inicial, tales como los que se comentaron en la Sección 2. De nuevo, se plantea el modelo matemático que describe el fenómeno, se investiga acerca del método o métodos de solución y se resuelve el modelo; la solución obtenida debe pasar por el proceso de validación contrastando con los datos disponibles. Finalmente, cada equipo hace la presentación de los resultados obtenidos para la secuencia de aprendizaje en

clase y recibe retroalimentación de los otros equipos de la clase. La evaluación de la presentación y el reporte escrito se realiza mediante una rúbrica. Considerando dos sesiones a la semana de dos horas cada una, el proceso de implementación de una secuencia de aprendizaje es del orden de cuatro semanas.

3. ENCUESTA DE PERCEPCIÓN

Como parte del proceso de retroalimentación hacia el profesor implementador de esta innovación, se aplicó una encuesta de percepción al final del semestre a un universo de cien alumnos. Las preguntas fueron cuatro y se asignó un espacio para incluir comentarios. Los resultados fueron los siguientes:

1) El realizar las actividades de Aprendizaje Activo con las secuencias de aprendizaje me pareció:

Muy interesante	Interesante	Indiferente	Nada interesante
40.2%	55.6%	4.2%	0%

Comentarios:

- Pude ver algo más real para aplicar los conceptos de la clase.
- El resolver problemas prácticos permite mayor comprensión de los temas del curso.

2) Al realizar estas actividades se reforzó mi conocimiento de los temas de la clase:

Totalmente de acuerdo	De acuerdo	Indiferente	En desacuerdo
37.5%	45.8%	16.7%	0%

Comentarios:

- Me gustó resolver problemas más reales.
- No me imaginaba que las ecuaciones diferenciales tuvieran tantas aplicaciones.
- Me quedó claro que una cosa son los problemas del libro y otra un problema real.

3) De acuerdo a tu opinión, ¿qué fue lo más valioso al realizar esta actividad?

- Ver una aplicación de la materia en la vida real.
- El trabajo colaborativo con los compañeros de equipo.
- Investigar por mi cuenta sin ayuda del profesor.
- Reforzamiento de los conceptos de la clase.
- Estas actividades hacen que la clase sea más dinámica y entretenida.

4) Prefiero realizar este tipo de actividades a seguir con la clase tradicional (exposiciones por parte del profesor):

Sí, pero la clase tradicional y este tipo de actividades son complementarias, no es posible hacer la actividad sin el conocimiento previo dado por el profesor.

Sí, pero las bases deben ser dadas por el profesor para entender lo que hacemos.

No, no me gusta esta forma de aprender, demanda mucho tiempo de nosotros.

4 CONCLUSIONES

De acuerdo con el enfoque descrito en el presente artículo, se proporciona un contexto aplicado a distintos tópicos del curso típico de ecuaciones diferenciales, lo cual en sí representa una mejora respecto a la forma convencional de presentar los conceptos fundamentales del curso. Más aún, el discutir en forma sistemática el proceso iterativo de mejora de los modelos matemáticos necesarios para describir un sistema dinámico de complejidad variable constituye un avance notable pues dota al docente de una secuencia de aprendizaje en donde aparece de manera natural el incorporar diferentes métodos analíticos de solución de los modelos matemáticos (*EDOs*) conforme surja la necesidad hasta, eventualmente, incorporar los métodos numéricos apropiados para obtener soluciones aproximadas con el grado de precisión deseada. En este punto, es importante contrastar la incorporación en nuestro enfoque de los métodos numéricos como una necesidad real contra la forma en la que estos métodos numéricos son introducidos generalmente en los cursos básicos de *EDOs*, donde estos métodos se aplican para resolver ecuaciones diferenciales cuya solución analítica es conocida, en lugar de aplicar esos métodos numéricos para resolver modelos matemáticos más sofisticados.

Por supuesto, para tener éxito en la implementación de este enfoque, se deben diseñar cuidadosamente las actividades de aprendizaje activo a desarrollar en el curso, cuidando en todo momento que sean interesantes, realistas y que cubran un porcentaje apreciable de los tópicos incluidos en el curso. La retroalimentación y el seguimiento

(*coaching*) es esencial para obtener resultados óptimos en el aprendizaje tanto de la parte algorítmica correspondiente a la solución de los modelos matemáticos, como la relativa a la validación de los resultados obtenidos contrastando estos resultados con datos experimentales o provenientes de censos o bases de datos.

Como parte del proceso de desarrollo de estas secuencias de aprendizaje, se desarrollan en los alumnos las habilidades de búsqueda de información en fuentes confiables y fidedignas pues, dado que los sistemas dinámicos propuestos están dotados de un contexto real, está garantizada la existencia de bases de datos experimentales o de campo para llevar a cabo el proceso de validación de las soluciones obtenidas.

Finalmente, es de resaltar el involucramiento y la motivación de los alumnos al desarrollar este tipo de actividades de aprendizaje activo pues el considerar este tipo de problemas más reales les resulta mucho más atractivo que simplemente resolver *EDOs* provenientes de un libro de texto, pero sin llevar a cabo un mínimo análisis sobre las soluciones obtenidas, así como sobre la interpretación, significado de dichas soluciones o la pertinencia de las mismas.

REFERENCIAS

Aprendizaje Activo, <https://www.theflippedclassroom.es/del-aprendizaje-activo-al-aprendizaje-interactivo/>, Recuperado el 30 de agosto de 2021.

Baumgartner, Félix, <https://www.open.edu/openlearn/ocw/mod/oucontent/view.php?id=77559§ion=2>, Recuperado el 30 de agosto de 2021.

Zill, Dennis G., *A First Course In Differential Equations with Modeling Applications*, 10th Edition, Cengage Learning, 2013.

SOBRE O ORGANIZADOR

Dr. José Luis Escamilla Reyes. Profesor del Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México desde 1998. Doctor en Física por la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Cuenta con una experiencia docente de 32 años. Es coautor de Manuales de Física II y Física III, así como de dos ebooks, uno sobre Física General y otro sobre Óptica y Física Moderna. Está certificado en el Programa de Desarrollo de Habilidades Docentes del Tecnológico de Monterrey. Ha participado con varios trabajos en Congresos Nacionales e Internacionales relacionados con la Física de Semiconductores de los grupos IV y III-V. Sus áreas de interés son: fuentes alternativas de energía, Física del Estado Sólido, diseño y aplicaciones de los MEMS y modelación matemática de Sistemas Complejos. Ha publicado más de 15 trabajos arbitrados y memorias en congresos. Colaboró en el diseño y construcción de láseres pulsados de N_2 en el Laboratorio de Óptica Cuántica de la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa (UAMI). En el Tecnológico de Monterrey Campus Ciudad de México, participó en el desarrollo de un prototipo de Celda de Combustible con membrana de intercambio protónico (*PEMFC*) de alta eficiencia. Obtuvo la Medalla al Mérito Académico por el mejor promedio de Maestría otorgada por la UAMI. Fue líder de la Cátedra de Investigación “Micro Sistemas Electromecánicos: Diseño y aplicaciones” del Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México y miembro del SNI.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Alimentación saludable 63, 64, 66, 67, 68, 69, 71, 72

América Latina 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 55, 58, 59, 60, 61, 62

Aprendizaje 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 63, 64, 68, 72, 74, 75, 76, 77, 79, 84, 85, 86, 94, 97, 99, 102, 103, 104, 105, 106, 108, 109, 110

Aprendizaje activo 97, 99, 103, 104, 105

Aprendizaje autónomo 1, 2, 3, 4, 6, 11

Aprendizaje cooperativo 74, 76, 79, 84, 85, 86

Atividades 14, 15, 27, 28, 29, 131, 133, 134, 135, 136, 137, 138

B

Blog 131, 132, 133, 135, 136, 137, 138

C

Cálculo 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 120, 121, 122, 128, 129, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138

Cálculo Diferencial 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 131, 138

Cerebro Triádico 74, 76, 78

Ciência 42, 44, 47, 48, 49, 50, 56, 57, 58, 59, 60

Ciência 30, 33, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 63, 64, 72, 73, 75, 77, 82, 131, 134

Classes de poliedros 120

D

Didático 106

E

Ecuaciones Diferenciales ordinarias 97, 98, 99

Educação baseada em competências 13

Educação científica 42, 44, 58, 61

Educación para el Desarrollo Sostenible 63, 66, 72

Enseñanza de la matemática 36, 87, 89, 91

Enseñanza de las Ciencias 63, 73, 75

Enseñanza de las ciencias y pensamiento crítico 63

Estrategias evaluativas 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40

Estudantes de medicina 12, 13, 14, 15, 25, 30

Evaluación formativa 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 40, 41

F

Formación de profesores 87

G

Género 59, 112, 113, 114, 115, 116, 118, 119

GeoGebra 120, 121, 122, 129, 131, 132, 133, 134, 136, 137, 138

H

Hexaedro tetrakis 120, 122, 126, 127, 128

I

Interesante 104, 106

Intubação 12, 13, 14, 15, 16, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31

L

Lúdico 9, 106

M

Matemática 10, 11, 32, 33, 35, 36, 38, 44, 47, 50, 51, 58, 60, 62, 87, 88, 89, 90, 91, 95, 96, 97, 100, 120, 121, 129, 132, 138

Matemáticas 1, 7, 10, 82, 89, 95, 96, 106, 107, 108, 110, 111

Matrícula 50, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119

Modelación matemática 87, 88, 89, 90, 95, 96, 97, 100

O

Operações sobre poliedros 120, 122

P

Pensamiento crítico 63, 64, 65, 66, 67, 68, 72

Propuesta 4, 6, 7, 9, 40, 64, 66, 67, 68, 70, 88, 90, 94, 95, 108, 106, 112, 113, 116, 118

Q

Química 44, 51, 61, 63, 67, 68, 72, 74, 75, 76, 80, 84, 85, 86, 108

R

Retroalimentación 32, 34, 37, 39, 40, 103, 104

S

Secuencias de aprendizaje 97, 99, 103, 105

Significativo 15, 106, 108, 109, 110

T

Tecnologia e Inovação 42, 45, 49, 52, 58, 59, 60

Tricerebrar 74, 75, 77, 79, 80, 83